

THE LEF MODEL · A SERIES OF TWELVE PAPERS

Lunar Elevation & Fission

4. המסלול

אחרי השחרור: הנטייה, השרידה וההתרחקות מתנאי הניתוק

חלקים A-E · נספחים A-B

זהר דוראן

חוקר עצמאי, רמלה, ישראל

ORCID <https://orcid.org/0009-0005-3194-9387>

תרגום מלא לעברית של המאמר האנגלי · 15 באוקטובר 2026

הסביבה שממנה החישוב יוצא לדרך

המאמר מתחיל בסופה של הבנייה המשוערת. במודל LEF, חומר מכדור הארץ בונה גוף מחובר באמצעות הזנה מבפנים, והקליפה החיצונית מתרוממת יחד איתו. הגוף יושב ככדור פחוס על קצה האגס: המגע שלו עם האגס מתקלף מרוחב של כ-6,000 ק"מ ל-3,000 ק"מ, ואז הוא מתנתק, מעוגל וקשיח. מאמר 2, *LEF Mechanism in Principle* (מנגנון LEF בעיקרון), בוחן את מאזן התנע הזוויתי, את הקורטציה ואת תנאי השחרור; מאמר 3, *LEF Mechanism in Practice* (מנגנון LEF בפועל), עוסק בבנייה ובחיבור. המאמר הזה ממשיך מרגע השחרור של הירח. הוא בוחן את המסלול שתנאי ההתחלה האלה יוצרים, ואת הדרישות להתפתחותו אל המסלול של היום.

מכיוון שהמערכת משתנה במהלך התהליך — מסה עוברת מגוף אחד לאחר, הסיבוב והצורה של כדור הארץ משתנים — כל מספר שלהלן שייך לרגע מוגדר. לטבלה שלוש עמודות: הראשונה מציינת את התחום, השנייה נותנת את המצב או הערך שבו משתמש המאמר, והשלישית אומרת איזה סוג של מספר זה וכיצד מותר להשתמש בו. העמודה השלישית מאפשרת לקורא לראות מיד אילו ערכים מוכנסים כהנחות של התרחיש ואילו הם תוצאות שעוברות ממאמרים 2 ו-3.

תחום	המצב או הערך שבו משתמשים כאן	מעמד ומשמעות
זמן	תחילת המערכת הקדומה; השעון המסלולי מתחיל בניתוק	זמן הניתוק אינו נקבע מחדש במאמר הזה
משך הבנייה	תרחיש של עד כ-600 מיליון שנה בסדרה, מתחילת הבליטה ועד השחרור לפני 3.873 מיליארד שנה (בערך 400 מיליון שנה לבליטה ולאגס, כ-100 מיליון שנה של פחיסות, כ-100 מיליון שנה עד השחרור)	ערך של התרחיש; אינו נמדד מהפרש הגילים בין הימות לקרום, ואינו משך ההתרחקות לאחר הניתוק
המסה ההתחלתית	$M_0 = M_{\oplus} + m = 6.0455 \times 10^{24} \text{ kg}$	לפני החלוקה; אסור להוסיף את מסת הירח פעם שנייה
המסות לאחר החלוקה	$M_{\oplus} = 5.972 \times 10^{24}$ $m = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$	הערכים המעוגלים המשותפים לסדרה
הכבידה המסלולית	$K = G (M_{\oplus} + m) = 4.0347667 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	תנועת ההפרדה היחסית של שני הגופים
הסיבוב בתחילת הבנייה	5.5 שעות בתרחיש הייחוס	אסור להציב את זמן המחזור הזה באופן אוטומטי ברגע הניתוק
מבנה גוף-האם	מודל הצורה ומומנט ההתמד של מאמר 2; הליבה מתמרכזת במהלך ההעברה, $D = 2$ בשחרור	ארגון הליבה משנה את מומנט ההתמד, את הסיבוב ואת השדה הלא-כדורי
ממדי גוף-האם הקדום	רדיוס נפחי 6,517 ק"מ; רדיוס משווני התחלתי כ-6,721 ק"מ	הצורה המשוונית מחושבת מחדש עם הסיבוב במאמר 2
יחידת מרחק להשוואה	$R_{\oplus, \text{now}} = 6371 \text{ km}$	יחידת דיווח בלבד, לא הרדיוס של כדור הארץ הקדום

קו הרוחב של השחרור	$\lambda = 22.5^\circ$, קו הרוחב של מרכז אזור המגע שעליו ישב הירח	קו הרוחב של מרכז המסה ביחס לציר הסיבוב בזמן השחרור: מרכז המגע, בקצה האגס. בסיס האגס עמד ליד Kiritimatī, 1.9° צפון 157.5° מערב, בערך על המשווה של אותו זמן (מאמר 3); 25° צפון 165° מזרח הוא גב האגס
מצב השחרור	$T_\oplus = 5.77 \text{ h}$, $r_0 = 17\,496 \text{ km}$ $\lambda = 22.5^\circ$	הירח מתחיל להיפרד כשמרכז המסה שלו מגיע לקו שבו המהירות שהסיבוב נותן, $\omega r \cos \lambda$, שווה למהירות המסלולית (17,287 ק"מ; מאמר 2, §B.1), ומשתחרר כ-210 ק"מ מעבר לו, כשמעט יותר ממחציתו (כ-58%) חצתה את הקו; מנגנון השחרור וחיפוש מרחק השחרור הם נושא מאמר 3 (C.5–C.5a§)
צפיפות הגוף המשוחרר	2,600 ק"ג/מ"ק, רדיוס כ-1,890 ק"מ	הנחה של מבחן ההישרדות; לא הצפיפות של הירח היום
חום, חומרים נדיפים ואטמוספירה	גוף חם, מתקרר דרך האטמוספירה, חומרים נדיפים בחומר ובסביבה	תנאי הסדרה; לא נמדדו לתקופה טמפרטורה, לחץ אדים או גרר מסלולי
ראולוגיה	קליפה וחיבור בחוזק משתנה; k_2/Q תלוי במצב ובתדירות	אסור לזהות את הצמיגות של שכבה מחליקה עם הפיזור הגאותי של גוף שלם
החיבור	כדור פחוס על קצה האגס; המגע מתקלף מרוחב של כ-6,000 ק"מ ל-3,000 ק"מ, והניתוק מתרחש מהמגע הרחב, החם והצמיג הזה	הגוף מתחיל להיפרד כאשר מרכז המסה שלו מגיע לרדיוס הקורוטציה המתוקן לפי קו הרוחב, ומשתחרר כ-210 ק"מ מעבר לו; המגע מתנגד מעט, והגוף נמשך החוצה בכוח; הניתוק עצמו מתואר במאמר 3
מצב היעד	$e = 0.0549$, $a = 384\,400 \text{ km}$ $i_{\text{ecl}} = 5.145^\circ$, התרחקות של כ-3.8 ס"מ בשנה	נתוני השוואה מודרניים [S1]

טבלת הסביבה של מאמר 4.

כמה שורות דורשות מילת הסבר. המסה ההתחלתית, 6.0455×10^{24} ק"ג, היא כדור הארץ של היום והירח של היום יחד: לפני החלוקה חומר הירח הוא חלק מגוף-האם, ואחריה אותה מסה היא הירח, ולכן היא נספרת פעם אחת. K הוא עוצמת הכבידה ששולטת בתנועה של שני הגופים זה סביב זה; הוא משתמש בסכום שתי המסות, משום שכל גוף מושך את האחר. היממה של 5.5 שעות שייכת לתחילת הבנייה; ברגע השחרור יום כדור הארץ הוא 5.77 שעות, משום שהאגס המתארך האט את כדור הארץ, והברזל שהתכנס אל מרכזו ($D = 2$), היחס בין צפיפות הליבה לצפיפות המעטפת) האיץ אותו שוב (מאמר 2). הרדיוס של כדור הארץ היום, 6,371 ק"מ, משמש רק כסרגל לדיווח מרחקים, ולא כגודלו של כדור הארץ הצעיר, שהיה חם וגדול יותר. קו הרוחב של השחרור דורש תשומת לב, משום שבסדרה מזכרים שלושה מקומות. בסיס האגס — המקום שבו האגס עלה מפני כדור הארץ — עמד ליד Kiritimatī, 1.9° צפון 157.5° מערב (מאמר 3), בערך על המשווה של אותו זמן; אם המשווה ההוא הוא המשווה של היום — נשאר לחקר הצירים של כדור הארץ-ירח, עבודה עתידית. הקואורדינטה 25° צפון 165°

מזרח, גם היא ממאמר 3, נקראת כגב האגס. קו הרוחב שחשוב למסלול אינו אף אחד מהם: זהו קו הרוחב של מרכז אזור המגע ברוחב 3,000 ק"מ שעליו ישב הירח ברגע השחרור, בקצה האגס: 22.5° . השורה האחרונה היא היעד: המרחק הממוצע של הירח היום a , האקסצנטריות שלו e (עד כמה המסלול סוטה ממעגל; 0 הוא מעגל מושלם), והנטייה שלו למישור המילקה (האקליפטיקה), המישור של מסלול כדור הארץ סביב השמש.

הכבידה אינה "מתפצלת" לשני חוקים: במהלך ההעברה משתנה פיזור המסה. משנקבעו שתי המסות, תנועת המרכזים בקירוב המונופול — כלומר כשמתייחסים לכל גוף כאילו כל מסתו מרוכזת במרכזו — נקבעת על ידי K , ואילו הארגון מחדש של הליבה פועל בעיקר דרך מומנט ההתמד, הסיבוב ומומנטי הכבידה הגבוהים (הסטיות של השדה משדה של נקודה, שנגרמות על ידי הבליטה והשכבות הפנימיות). חיבור בעל מסה משמעותית מחייב להוציא את המסה הזו מהמאגרים האחרים ולחשב את המערכת מחדש; זו אינה תוספת חינם.

תקציר

במודל LEF הירח נבנה מחומר של כדור הארץ בעודו מחובר לגוף-האם, ואז שוחרר. המאמר בוחן את התוצאה המסלולית של שחרור כזה. הנטייה של מסלול היא הזווית בין המישור שבו הגוף סובב לבין מישור ייחוס — כאן, המשוואה של כדור הארץ באותו זמן. גוף שמרכזו נמצא בקו רוחב λ , ושמהירותו המשיקית ברגע השחרור היא בכיוון הסיבוב בלבד, מקבל נטייה התחלתית $i_0 = |\lambda|$ ביחס למשוואה של אותו זמן. שחרור מקומי בקו רוחב ביניים מספק אפוא מקור גאומטרי לנטייה ההתחלתית. שתי הערות קובעות מהו λ . זהו קו הרוחב של מרכז הגוף ברגע השחרור, ולא של נקודה כלשהי בבסיסו: לגוף ברוחב 3,000 ק"מ יש וקטור מהירות אחד, והשטח של בסיסו אינו מפזר את הנטייה. והוא קו הרוחב של מרכז אזור המגע ברוחב 3,000 ק"מ שעליו ישב הירח, בקצה האגס: 22.5° , קו הרוחב שבו משתמשים לאורך כל המאמר. 25° משמש כמקרה רגישות — קו רוחב גבוה יותר נותן נטייה התחלתית גדולה יותר, ויותר ממנה צריך להיעלם בדרך אל ה- 5.1° של היום (לפי חוק הטנגנס של חלק D , 22.5° מחזיר את 5.145° של היום משחרור המודל, ו- 25° מחזיר 5.79° ; גרסה קודמת, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו, נתנה 5.079° מ- 22.5°).

בצירוף מאמר 2, מצב השחרור קבוע: יום כדור הארץ בשחרור הוא 5.77 שעות (האגס המתארך והליבה המתמרכזת פועלים יחד), ומרכז הירח נמצא בקו רוחב 22.5° . מחוץ למשוואה הסיבוב נושא את הגוף במהירות $\omega r \cos \lambda$, ולכן הגוף מגיע למהירות מסלולית ב- $\lambda \approx 17287 \cos^{-2/3} r_c$ ק"מ ($x = 1.0542$), קו הקורטציה של קו הרוחב שלו. הירח מתחיל להיפרד כשמרכז המסה שלו מגיע לקו הזה, ומשתחרר כ-210 ק"מ מעבר לו, ב- $r_0 \approx 17496$ ק"מ ($x = r_0/r_c = 1.0669$), כשמעט יותר ממחציתו חצתה את הקו; המגע מתנגד מעט, והגוף נמשך החוצה בכוח. כשהוא משתחרר שם, הוא נכנס למסלול כמעט מעגלי ($e_0 \approx 0.04$) הנוטה ב- 22.5° למשוואה של אותו זמן, ונקודת השחרור היא הפריגאה שלו; הגאות דוחפת החוצה מהרגע הראשון, ולכן הירח מתרחק מההתחלה. הירח בשחרור עגול, עם קליפה חיצונית קשיחה; הוא נמצא כ-7,200 ק"מ מחוץ לגבול רוש הקשיח, שעומד על 10,314 ק"מ. מרחק השחרור הוא המרחק שבו נפגשים שני מבחנים מצומצמים — הנטייה של היום והאקסצנטריות של היום (מאמר 3, §C.5a).

לאחר מכן מוצגים מבחנים של המעבר במישור Laplace, של הפיזור הגאותי ושל ההיסטוריה התרמית. הפתרון של משוואת הדעיכה המצומצמת מתייחס ל- $\tan i$, ולא ל- $\sin i$; ההתבטלות המפורשת של $Q_\oplus$ במשוואה הזו אינה מבטלת את התלות של המסלול המלא בהתקררות ובתהודות. התוצאה המבוססת היא המקור הגאומטרי של הנטייה וההתאמה בין תנאי השחרור לבין המסלולים ההתחלתיים. שחזור משותף של המרחק, הנטייה, האקסצנטריות וקצב ההתרחקות של היום עדיין צריך להיות מחושב.

הנטייה של מסלול הירח היא קו הרוחב שממנו הוא יצא. גוף שמשתחרר בעודו מסתובב עם כדור הארץ בקו רוחב λ נכנס למסלול שנוטה בדיוק ב- λ למשווה של כדור הארץ: $h = r \times v$, שלוש שורות של אלגברה, אין פרמטר לכוון. דיסקה אינה יכולה לעשות זאת — דיסקה שוקעת אל המשווה — ולכן הנטייה של הירח היא בעיה פתוחה כבר שלושים שנה, וכל פתרון שהוצע לה מוסיף משהו לתמונה. כשהוא משתחרר מ- 22.5° , הירח מתחיל בנטייה של 22.5° ; כשהגאות נושאת אותו החוצה, החוק המצומצם $\tan i \propto a^{-1/2}$ מביא אותה ל- 5.145° במרחק של היום, הערך הנצפה. מ- 25° , מקרה רגישות, אותו חוק נותן 5.788° .

אותה גאומטריה אומרת היכן הגוף היה צריך להשתחרר, והמאמר אומר זאת. ברדיוס הקורטציה המשווני (המרחק שבו גוף שמסתובב עם כדור הארץ כבר נע במהירות של מסלול חופשי), גוף בקו רוחב λ נע לאט מדי בשביל מעגל: המסלול שלו אקסצנטרי ($e_0 = \sin^2 \lambda$), הוא משתחרר בנקודת הרום (האפוגיאום), והגאות של כדור הארץ מושכת אותו בתחילה פנימה. מחוץ למשווה המהירות שהסיבוב נותן היא $\omega r \cos \lambda$, ולכן קו הקורטציה נמצא מעט רחוק יותר, ב- $x = 1.0542$, $17,287$ ק"מ. הירח מתחיל להיפרד כשמרכז המסה שלו מגיע לקו הזה, ומשתחרר כ- 210 ק"מ מעבר לו, ב- $x = 1.0669$, $17,496 = r_0$ ק"מ, כשמעט יותר ממחציתו חצתה את הקו: המגע מתנגד מעט, והגוף נמשך החוצה בכוח. כשהוא משתחרר שם, הירח נכנס למסלול כמעט מעגלי ($e_0 \approx 0.037$) שהפריגאה שלו היא נקודת השחרור; הגאות דוחפת החוצה מהרגע הראשון, ולכן הוא מתרחק מהמסלול הראשון שלו, כ- $7,200$ ק"מ מחוץ לגבול רוש הקשיח של $10,314$ ק"מ. (גרסה קודמת, עם שחרור כ- 100 ק"מ מעבר לקו, נתנה $r_0 = 17,387$ ק"מ ו- $e_0 \approx 0.017$; גרסה שלפניה השתמשה בשחרור רחוק יותר מעבר לקו, ב- $x \approx 1.15$). הירח בשחרור עגול, הקליפה החיצונית שלו קשיחה (יחס צירים של 1.04 לכל היותר, מאמר 2, B.7§); הפחיסות וההתעגלות שלו התרחשו בזמן שהיה מחובר (מאמר 7). מאמר 3 מתאר את הניתוק מהמגע, ומאמר 2 מוצא את אותו מצב שחרור מצד מאזן התנע הזוויתי. מה שהחוק המצומצם אינו עושה הוא את ההיסטוריה כולה: המעבר במישור Laplace, מצב Cassini, הצורה המאובנת ופיזור שבהכרח השתנה — Q קבוע אחד מתאים או לקצב של היום או לגיל, לא לשניהם. כל אחד מאלה מנוסח בחלק E יחד עם המבחן שיבדוק אותו. הדרישות של המודל, ומה שיבחן אותן, מרוכזים במאמר 11 (הדרישות).

התיבה מעלה שתי טענות, וכדאי לראות אותן במילים פשוטות. הראשונה עוסקת בכיוון. חומר שמסתובב עם כדור הארץ בקו רוחב 22.5° נע מזרחה לאורך מעגל הרוחב שלו, במקביל למשווה; אבל המסלול שהוא נכנס אליו אחרי השחרור חייב לעבור דרך מרכז כדור הארץ, משום שלשם הכבידה מושכת. מישור שעובר דרך מרכז כדור הארץ ודרך נקודה 22.5° צפונית למשווה, ונמשך שם מזרחה, הוא מישור שנוטה ב- 22.5° למשווה. אין צורך בשום דבר אחר: לא מסה, לא מרחק ולא קצב סיבוב נכנסים לתשובה. זו המשמעות של "שלוש שורות של אלגברה, אין פרמטר": התוצאה נכתבת בשלוש שורות (משוואות 1–3 של חלק A), ואין בה מספר שאפשר לכוון כדי להתאים. בתמונת הדיסקה של מודל ההתנגשות, לעומת זאת, הירח נוצר מפסולת שמתפשטת לטבעת שטוחה מעל המשווה, ולכן הוא מתחיל כמעט בלי נטייה, והנטייה של היום צריכה להיווצר אחר כך על ידי תהליך נוסף.

הטענה השנייה עוסקת במרחק. על המשווה, רדיוס הקורטציה הוא המרחק שבו המהירות שהסיבוב נותן שווה למהירות של מסלול מעגלי; ביממה של 5.77 שעות הוא $16,399$ ק"מ. מחוץ למשווה גוף קרוב יותר לציר הסיבוב מאשר למרכז כדור הארץ, בגורם $\cos \lambda$, ולכן הסיבוב נושא אותו לאט יותר מגוף משווני באותו מרחק. לכן צריך לשאת אותו מעט רחוק יותר החוצה עד שמהירותו משתווה למהירות המסלולית: ב- 22.5° זה $17,287$ ק"מ, 5.42% מעבר לקו המשווני ($x = 1.0542$). גוף שהיה משתחרר בדיוק על הקו הזה היה נכנס למעגל, והגאות הייתה ניטרלית: הירח היה סובב בדיוק באותה מהירות כמו החלק של סיבוב כדור הארץ שפועל לאורך המסלול שלו, ולכן הבליטה הגאותית שהוא מעורר בכדור הארץ לא הייתה נישאת לא לפניו ולא מאחוריו, ולא הייתה נותנת שום דחיפה. הירח מתחיל להיפרד כשמרכזו מגיע לקו הזה, ומשתחרר כ- 210 ק"מ מעבר לו, ב- $17,496$

ק"מ. שם הוא נע מעט מהר יותר ממה שמעגל דורש, ולכן נקודת השחרור היא הנקודה הקרובה ביותר של מסלול כמעט מעגלי ($e_0 \simeq 0.037$); וכדור הארץ מסתובב מהר יותר משהירח סובב, הבליטה נישאת לפני הירח, והמשיכה שלה מושכת את הירח קדימה לאורך המסלול, כך שהמסלול גדל מהרגע הראשון. גבול רש הוא המרחק שבתוכו הגאות של כדור הארץ הייתה קורעת גוף לגזרים; עבור גוף שמוחזק יחד על ידי קליפה קשיחה הוא 10,314 ק"מ, והירח משתחרר כ-7,200 ק"מ מחוצה לו. החוק המצומצם $\tan i \propto a^{-1/2}$ מתאר אז כיצד הנטייה קטנה ככל שהמסלול מתרחב: עד המרחק של היום 22.5° הופכות ל- 5.145° , הערך הנצפה. חלק D מראה שזה חוק מצומצם; הדרך המלאה דרך המעבר במישור Laplace ומצב Cassini, ופיזור שהשתנה עם הזמן, הם הדרישות שמפורטות בחלק E.

חלק A — איזו נטייה מתקבלת ברגע השחרור?

הבעיה

הקורא פוגש שתי זוויות שונות: קו הרוחב של השחרור על גוף-האם, והנטייה המסלולית ביחס למישור המילקה. תחילה אנו גוזרים את הנטייה ביחס למשוואה הקדום; לאחר מכן אנו בוחנים את המעבר למערכת התצפית של היום.

החלק הזה עונה על שאלה אחת: ברגע שבו הירח משתחרר, באיזו תלילות נוטה המסלול החדש שלו? תחילה הוא ממקם את השאלה בין מודלים אחרים (A.1), אחר כך גוזר את התשובה (A.2), ולבסוף מפריד בין שלוש זוויות שקל לבלבל ביניהן כשבוחנים יחד את ציר כדור הארץ ואת מסלול הירח (A.3). המעבר מהמשוואה הקדום אל מישור המילקה של היום הוא נושא חלק C.

תחילה, מה המילה אומרת. כל מסלול נמצא במישור: הגוף סובב במישור הזה, ומרכז כדור הארץ נמצא בו. הנטייה המסלולית היא הזווית בין המישור הזה לבין מישור ייחוס שנבחר. במאמר מופיעים שני מישורי ייחוס. האחד הוא המשוואה של כדור הארץ בזמן השחרור, שהוא טבעי בהתחלה, כשהירח רק עזב את כדור הארץ המסתובב. השני הוא מישור המילקה (האקליפטיקה), המישור של מסלול כדור הארץ סביב השמש, שמולו נמדדת הנטייה של הירח היום, 5.145° . תיאור שקול, שבו משתמשת הגזירה, הוא דרך הכיוון הניצב למישור המסלול: הנטייה היא הזווית בין הניצב הזה לבין הניצב למישור הייחוס — במקרה של המשוואה, ציר הסיבוב של כדור הארץ.

A.1 ההקשר של מודלים אחרים

היווצרות מדיסקה הקרובה למישור המשוואה מעלה את השאלה מהו מקור הנטייה של היום. במשפחת מודלי ההתנגשות הענקית, הפסולת שנזרקת בהתנגשות שוקעת לדיסקה מעל המשוואה של כדור הארץ, וירח שגדל מהדיסקה הזו סובב כמעט במישור המשוואה. את הנטייה של היום צריך אז לספק מאוחר יותר. עם זאת, בספרות יש מגוון עירור מאוחרים, כמו מפגשים עם פלנטיזימלים [S2] והתפתחות מצומדת של מערכת בעלת נטיית ציר גבוהה [S3]. היווצרות מדיסקה אינה שוללת אפוא עירור מאוחר של הנטייה. ההבדל שנבחן כאן הוא ש-LEF יכול להתחיל בנטייה משמעותית כבר בשחרור, בלי צורך בעירור מאוחר כדי ליצור את זווית ההתחלה. ב-LEF הנטייה אינה אירוע נוסף; היא נובעת מהמקום על כדור הארץ המסתובב שבו הגוף היה מחובר.

A.2 הגזירה

לפני האלגברה, התמונה. דמיינו קרוסלה שאמצעה עומד במרכז כדור הארץ, ודמיינו שהמשיכה היחידה על כל דבר בקרבתה היא אל הנקודה המרכזית הזו. אכן נישאת סביב על טבעת שקבועה בגובה מעל האמצע, כמו שורת מושבים מוגבהת. בזמן שהיא נישאת, האבן נעה אופקית — לאורך הטבעת שלה, במקביל לרצפה. עכשיו משחררים אותה. היא יוצאת עם המהירות האופקית הזו, אבל המשיכה עליה מכוונת אל הנקודה המרכזית, למטה ופנימה. לכן הדרך החופשית שלה חייבת להימצא במישור היחיד שמכיל גם את הנקודה המרכזית וגם את המהירות האבן: מישור שיוצא מהאבן, בכיוון תנועתה, ויורד דרך המרכז. המישור הזה נוטה לרצפה בדיוק בזווית שבה האבן נראית מהמרכז, מעל הרצפה. אבן על טבעת גבוהה יותר נראית בזווית תלולה יותר ונכנסת למסלול תלול יותר; אבן על הרצפה עצמה נשארת במישור הרצפה. בכדור הארץ, הרצפה היא המשוואה, הטבעת היא

מעגל הרוחב, והזווית שבה הגוף נראה מהמרכז היא קו הרוחב שלו λ . המשוואות שלהלן אומרות את אותו הדבר בשלוש שורות.

נסמן את ציר הסיבוב ברגע השחרור כציר z , ונבחר את ציר x כך שהגוף נמצא במישור $z-x$; ציר y מצביע אז מזרחה במקום הגוף. עבור מהירות קורטציה מזרחית, במערכת ייחוס אינרציאלית (כזו שאינה מסתובבת עם כדור הארץ) ועם הפרדה בין מרכזי המסה:

$$\mathbf{r} = r (\cos \lambda, 0, \sin \lambda), \quad \mathbf{v} = \omega r (0, \cos \lambda, 0).$$

כאן r הוא המיקום של מרכז הגוף ביחס למרכז כדור הארץ, במרחק r ובקו רוחב λ ; $\mathbf{v}$ היא מהירותו, ו- ω קצב (1) הסיבוב של כדור הארץ. המרחק של הגוף מציר הסיבוב הוא $r \cos \lambda$, ולכן הסיבוב נושא אותו מזרחה במהירות $\omega r \cos \lambda$; זו המהירות שמופיעה בטבלת הסביבה.

התנע הזוויתי הסגולי — התנע הזוויתי ליחידת מסה, $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ — הוא וקטור שניצב גם ל- $\mathbf{r}$ וגם ל- $\mathbf{v}$, ולכן ניצב למישור המסלול. הכיוון שלו הוא ה"ציר" של המסלול, ותחת משיכה מרכזית הוא אינו משתנה לאחר השחרור. התנע הזוויתי הסגולי הוא:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \omega r^2 (-\sin \lambda \cos \lambda, 0, \cos^2 \lambda).$$

אורכו $|\mathbf{h}| = \omega r^2 \cos \lambda \sqrt{\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda} = \omega r^2 \cos \lambda$. הנטייה למשוואה היא הזווית בין $\mathbf{h}$ לבין ציר הסיבוב z , (2) והקוסינוס שלה הוא רכיב ה- z של $\mathbf{h}$ חלקי אורכו. לכן, עבור תנועה פרוגרדית (סיבוב באותו כיוון כמו הסיבוב של כדור הארץ) שאינה בקוטב:

$$\cos i_0 = \frac{h_z}{|\mathbf{h}|} = \cos \lambda, \quad i_0 = |\lambda|.$$

בחלוקה, הגורם ωr^2 מופיע גם במונה וגם במכנה ומתבטל; נשאר רק קו הרוחב. התנאי "שאינה בקוטב" נדרש (3) משום שבקוטב הגוף נמצא על ציר הסיבוב, אינו נישא בשום מהירות, ואין לו מסלול שאפשר לדבר עליו.

זוהי זהות קינמטית: היא נובעת מהגאומטריה של התנועה בלבד, ולא מתכונה כלשהי של החומר או מחוק כוח כלשהו מעבר למשיכה מרכזית. המסה, המרחק וקצב הסיבוב אינם מופיעים בתוצאה הסופית. עם זאת, בחירת קו הרוחב היא תנאי התחלה של המודל, והקשר אינו מבסס לא את מיקום המקור המוצע ולא את התרחשות הניתוק. מה שהזהות עושה הוא להפוך את קו הרוחב ואת הנטייה לאותו גודל: בהינתן אחד מהם, השני קבוע.

הזהות מניחה שהמהירות בשחרור מזרחית לחלוטין, כפי שהקורטציה נותנת אותה. שני רכיבי מהירות נוספים אפשריים, והם פועלים באופן שונה. מהירות רדיאלית נוספת (ישר החוצה או פנימה, לאורך r) אינה משנה את $\mathbf{h}$, משום שהמכפלה הווקטורית של r בווקטור שלאורך r היא אפס, ולכן היא לבדה אינה משנה את מישור המסלול; היא משנה את צורת המסלול, לא את הנטייה שלו. אם יש גם מהירות צפונית v_N , לצד מהירות מזרחית $v_E > 0$:

$$\cos i_0 = \frac{v_E \cos \lambda}{\sqrt{v_E^2 + v_N^2}}.$$

מכיוון ש- v_N מופיע רק בריבוע, רכיב צפוני ורכיב דרומי שניהם מקטינים את $\cos i_0$, כלומר הופכים את (4) המסלול לתלול יותר מ- λ ; עם $v_N = 0$ משוואה (4) חוזרת למשוואה (3).

לכן הניתוק מחיבור רחב קובע את המהירות של מרכז המסה לאחר שהכוחות הפנימיים פוסקים. במודל הירח מתחיל להיפרד כשמרכז המסה שלו מגיע לקו הקורטציה, ומשתחרר כ-210 ק"מ מעבר לו; המגע מתנגד מעט, והגוף נמשך החוצה בכוח. המשיכה הזו פועלת לאורך הרדיוס, וכפי שהוסבר לעיל, רכיב רדיאלי משנה את צורת המסלול ולא את נטייתו. הגוף יוצא עם המהירות המזרחית שהסיבוב נותן, והנטייה בשחרור היא קו הרוחב של מרכזו, 22.5° .

A.3 שלוש זוויות שאין לבלבל ביניהן

עד כאן נבחנו רק המסלול. אבל גם כדור הארץ נושא תנע זוויתי, בסיבוב שלו, ומסלול הירח והסיבוב של כדור הארץ יחד מרכיבים את התנע הזוויתי של המערכת כולה. משהגוף חופשי ואין מומנט חיצוני שפועל, הסכום הזה — לא ציר כדור הארץ ולא ציר המסלול — הוא ששומר על כיוון קבוע במרחב. לכן שלושה כיוונים משחקים כאן תפקיד: ציר הסיבוב של כדור הארץ, הניצב למסלול הירח, והסכום. הסעיף הזה נותן את הזוויות ביניהם, ואומר מה הן אינן.

במצב השחרור (מאמר 2: הסיבוב של כדור הארץ 2.876×10^{34} , מסלול הירח 5.90×10^{33} ק"ג·מ²·ש⁻¹) מתקבלות 22.5° בין המסלול לבין ציר כדור הארץ, כ- 3.78° בין ציר כדור הארץ לבין התנע הזוויתי הכולל, וכ- 18.72° בין המסלול לבין התנע הזוויתי הכולל. אלה זוויות באותו משולש וקטורים. המסלול נושא כחמישית מהתנע הזוויתי של הסיבוב של כדור הארץ, ולכן הסכום קרוב הרבה יותר לציר כדור הארץ מאשר למסלול: ה- 22.5° שבין השניים מתחלקות ל- 3.78° בצד של כדור הארץ ול- 18.72° בצד של המסלול ($22.5 = 18.72 + 3.78$). אף אחת משתי האחרונות אינה כשלעצמה הנטייה ביחס למישור המילקה, או הסבר ל- 23.44° של ציר כדור הארץ היום. כיצד ציר כדור הארץ ומסלול הירח התפתחו יחד לאחר השחרור, לעבר ה- 23.44° של היום, אינו נפתר בסדרה הזו; זו עבודה עתידית.

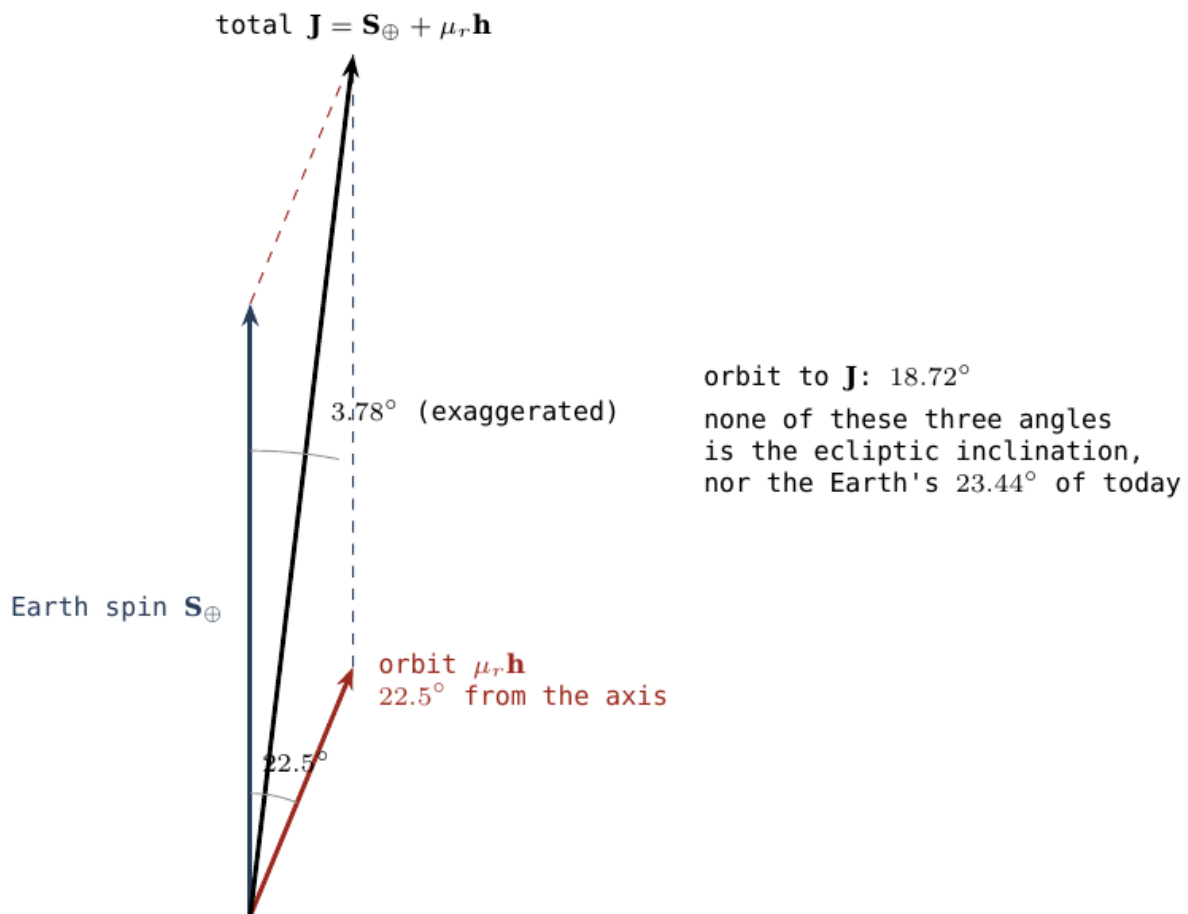
החלוקה מתוארת, בהזנחת סיבוב ירחי קטן ובשלב שבו אין מומנט חיצוני משמעותי, על ידי:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}_\oplus + \mu_r \mathbf{h}, \quad \mu_r = \frac{M_\oplus m}{M_\oplus + m}.$$

במילים: התנע הזוויתי הכולל $\mathbf{J}$ הוא התנע הזוויתי של הסיבוב של כדור הארץ, $\mathbf{S}_\oplus$, ועוד התנע הזוויתי (5) המסלולי של הזוג. החלק המסלולי הוא התנע הזוויתי הסגולי $\mathbf{h}$ של משוואה (2), מוכפל במסה המצומצמת μ_r , המסה הסטנדרטית שמתארת שני גופים הסובבים סביב מרכזם המשותף; מכיוון שהירח קל בהרבה מכדור הארץ, μ_r קרובה מאוד למסה של הירח עצמו.

החישוב מבסס עקביות בין מצבים, ולא "בעיטה" פתאומית לציר בזמן הניתוק: חילופי התנע הזוויתי יכולים להצטבר במהלך הבנייה. במילים אחרות, ציר כדור הארץ אינו מופל כשהירח עוזב; הזוויות של המשולש מתארות כיצד התנע הזוויתי כבר מחולק בין סיבוב למסלול באותו רגע. בטיפול מלא יש לכלול גם את הסיבוב של הירח, חומר שנפלט ומומנטים חיצוניים.

איור 4 משרטט את המשולש. קראו אותו מהראשית המשותפת: החץ הכחול הכהה הוא הסיבוב של כדור הארץ, החץ האדום הוא המסלול, הנטה ממנו ב- 22.5° , והחץ השחור הוא הסכום שלהם. הקווים המקווקווים משלימים את המקבילית של חיבור הווקטורים. מכיוון שחץ המסלול הוא הקצר מביניהם, הסכום נוטה רק מעט מציר כדור הארץ.



איור 4. שלוש הזוויות של חלק A.3 במשולש וקטורים אחד (לא בקנה מידה; וקטור המסלול וה-3.78° מוגזמים): המסלול עומד 22.5° מציר כדור הארץ, הציר 3.78° מהתנע הזוויתי הכולל, והמסלול 18.72° מהכולל. הנטייה ביחס למישור המילקה נמדדת מול כיוון רביעי, ודורשת את חלק C. (בשרטוט: חץ כחול כהה — הסיבוב של כדור הארץ $\mathbf{S}_{\oplus}$; חץ אדום — המסלול $\mu_r \mathbf{h}$, 22.5° מהציר; חץ שחור — הכולל $\mathbf{J} = \mathbf{S}_{\oplus} + \mu_r \mathbf{h}$; קשת — 3.78° (מוגזם); בצד: מהמסלול אל $\mathbf{J}$ 18.72°; אף אחת משלוש הזוויות האלה אינה הנטייה ביחס למישור המילקה, וגם לא ה-23.44° של כדור הארץ היום.)

הכיוון הרביעי שנזכר בכיתוב הוא הניצב למישור המילקה, שנקבע על ידי תנועת כדור הארץ סביב השמש, ולא על ידי דבר כלשהו בזוג כדור הארץ-ירח. מה שחלק A ביסס הוא נטיית ההתחלה: 22.5° למשווה של זמן השחרור, שנקבעת על ידי קו הרוחב של מרכז הגוף. חלק B מוצא את הגודל ואת הצורה של המסלול שהגוף נכנס אליו בנקודת השחרור שלו, וחלק C עוקב אחר מישור המסלול החוצה אל המערכת שבה נמדדות ה-5.145° של היום.

חלק B — האם הגוף נכנס למסלול ששורד ומתרחק?

הבעיה

מהירות הקורטוציה אינה בהכרח המהירות המעגלית המתאימה לקו הרוחב של השחרור. אנו מחשבים את האליפסה המתקבלת, ומחברים אותה למבחני הגאות וההישרדות שכבר פותחו במאמר 2.

חלק A הראה שגוף שמשתחרר בזמן שהוא מסתובב עם כדור הארץ בקו רוחב λ נכנס למסלול הנטוי בזווית λ למשווה של כדור הארץ. חלק זה שואל את השאלה הבאה: מה הצורה והגודל של המסלול הזה, האם הגאות של כדור הארץ דוחפת אותו אחר כך החוצה או מושכת אותו פנימה, והאם הגוף רחוק דיו מכדור הארץ כדי להישאר שלם. לשאלה יש משקל, כי נטייה אינה מועילה דבר אם המסלול שנושא אותה מתפתל אל תוך כדור הארץ או קורע את הגוף.

המשפט הראשון בתיבה דורש מילת הסבר. גוף שמסתובב עם כדור הארץ בקו רוחב λ אינו מקיף את ציר כדור הארץ במלוא מרחקו r מן המרכז, אלא במרחק הקטן יותר $r \cos \lambda$ מן הציר. לכן הוא נע לאט יותר מגוף באותו מרחק מעל המשווה, ובמרחק רדיוס הקורטוציה המשווני — המרחק שבו גוף שמסתובב עם כדור הארץ כבר נע במהירות של מסלול חופשי — הוא איטי מעט מדי למסלול מעגלי. המסלול שהוא נכנס אליו הוא אז אליפסה, ויש למקם את נקודת השחרור כך שהדבר יובא בחשבון; הסעיף הזה מוצא היכן המסלול הוא מעגל, ואיזה מסלול הירח נכנס אליו בנקודת השחרור שלו בפועל, מעט מעבר לשם.

B.1 מקואורדינטות השחרור אל אליפסה

מסלול סביב כדור הארץ הוא באופן כללי אליפסה. שלושה מספרים מתארים את גודלה וצורתה. חצי הציר הגדול a הוא מחצית הקוטר הארוך ביותר של האליפסה, הממוצע בין המרחק הקרוב ביותר לרחוק ביותר; הוא קובע את זמן המחזור של המסלול. האקסצנטריות e מודדת עד כמה האליפסה מתוחה: $e = 0$ הוא מעגל, וערכים המתקרבים ל-1 מתארים אליפסה ארוכה וצרה. הנקודה הקרובה ביותר של המסלול לכדור הארץ היא הפריגאה, במרחק $r_p = a(1 - e)$; הנקודה הרחוקה ביותר היא האפוגאה, ב- $a(1 + e)$.

נסמן:

$$B = \frac{\omega^2 r_0^3 \cos^2 \lambda}{K}, \quad \mathcal{E} = \frac{K}{r_0} \left(\frac{B}{2} - 1 \right).$$

כאן ω היא המהירות הזוויתית של סיבוב כדור הארץ ברגע השחרור, r_0 מרחק מרכז הירח ממרכז כדור הארץ, (6) λ קו הרוחב שלו, ו- $K = G(M_\oplus + m)$ הפרמטר הכבידתי של הזוג (קבוע הכבידה, $M_\oplus$ ו- m מסות כדור הארץ והירח). למספר B יש משמעות פשוטה: הגוף נע במהירות $v = \omega r_0 \cos \lambda$ ו- $B = v^2 / (K/r_0)$ הוא ריבוע המהירות הזו מחולק בריבוע מהירות המסלול המעגלי באותו מרחק. $B = 1$ פירושו שלגוף יש בדיוק מהירות של מסלול מעגלי; $B < 1$ פירושו שהוא איטי מדי; $B > 1$, מהיר מדי; ו- $B = 2$ היה מהירות המילוט. $\mathcal{E}$ היא האנרגיה המסלולית ליחידת מסה; היא שלילית, ולכן הגוף קשור לכדור הארץ, כל עוד $B < 2$.

לשחרור ללא מהירות רדיאלית (הגוף אינו נע באותו רגע לא אל כדור הארץ ולא ממנו), כאשר $0 < B < 2$, בקירוב של שתי מסות נקודתיות (כדור הארץ והירח מטופלים כנקודות מסה):

$$a_0 = \frac{r_0}{2 - B}, \quad e_0 = |1 - B|, \quad r_p = a_0(1 - e_0).$$

במילים: מרחק השחרור והמספר היחיד B קובעים את כל המסלול ההתחלתי. ככל ש- B רחוק יותר מ-1, (7) האליפסה אקסצנטרית יותר.

אם $B < 1$, השחרור הוא באפוגאה; אם $B > 1$, בפריגאה; $B = 1$ נותן מעגל. הסיבה ישירה. גוף שאיטי מדי למסלול מעגלי במרחקו מתחיל ליפול פנימה, ולכן הנקודה שבה שוחרר היא הנקודה הרחוקה ביותר של מסלולו; גוף מהיר מדי מתנופף החוצה, ולכן נקודת השחרור היא הקרובה ביותר. ברדיוס $r_c = (K/\omega^2)^{1/3}$ — רדיוס הקורטציה המשווני, שבו לגוף מעל המשווה שמסתובב עם כדור הארץ יש בדיוק המהירות המעגלית — לגוף בקו רוחב λ יש $B = \cos^2 \lambda$, ולכן $e_0 = \sin^2 \lambda$, ולא אפס. ה- $\cos^2 \lambda$ הוא ההאטה שהוסברה לעיל: הגוף מקיף את הציר ב- $r \cos \lambda$, לא ב- r . המסלול מעגלי, $B = 1$, ב-

$$r_0 = r_c \cos^{-2/3} \lambda,$$

שם המהירות שהסיבוב נושא שווה למהירות המסלולית. הזזת נקודת השחרור החוצה משלימה את המהירות (7a) החסרה, כי המהירות שהסיבוב נושא גדלה עם המרחק בעוד המהירות המעגלית יורדת; משוואה (7a) נותנת את המרחק שבו השתיים נפגשות לגוף בקו רוחב λ . ליממה של 5.77 שעות, $r_c = 16\,399$ ק"מ (כ-2.6 רדיוסי כדור הארץ), וב- $\lambda = 22.5^\circ$ הרדיוס המעגלי — קו הקורטציה של קו הרוחב הזה — הוא 17,287 ק"מ, כ-900 ק"מ רחוק יותר, פקטור $x = 1.0542$. הירח מתחיל להיפרד כשמרכז המסה שלו מגיע לקו הזה, ומשתחרר כ-210 ק"מ מעבר לו, ב- $r_0 = 17\,496$ ק"מ ($x = 1.0669$), כשמעט יותר ממחציתו (כ-58%) חצתה את הקו. שם $B = 1.0367$, מעט מעל 1: הגוף מהיר מעט ממה שמעגל דורש, נקודת השחרור היא הפריגאה, ומשוואה (7) נותנת מסלול כמעט מעגלי עם $e_0 = 0.037$, $a_0 = 18\,163$ ק"מ ואפוגאה של 18,830 ק"מ. (גרסה קודמת, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו, נתנה $r_0 = 17\,387$ ק"מ, $e_0 = 0.017$, $a_0 = 17\,696$ ק"מ ואפוגאה של 18,005 ק"מ.) מרחק השחרור הוא המרחק שבו נפגשים מבחני הנטייה והאקסצנטריות המצומצמים של מאמר 3, C.5a§.

B.2 תוצאות משולבות ממאמר 2

הטבלה שלהלן מיישמת את משוואות (6)–(7) על חמש נקודות שחרור ומוסיפה שני מבחנים: הכיוון שבו הגאות של כדור הארץ מזיזה תחילה את המסלול, והמרחק מגבול רש. כאן $x = r_0/r_c$, מרחק השחרור ביחידות של רדיוס הקורטציה המשווני. כל השורות משתמשות ביממת השחרור של מאמר 2, 5.77 שעות ($D = 2$), וב- $\lambda = 22.5^\circ$. הוא יחס הצפיפות בין הליבה למעטפת במבנה של מאמר 2 שנותן את היממה הזו. עמודת רש משתמשת בגבול הקשיח, כי הגוף קשיח ועגול ברגע השחרור (מאמר 2, B.7§).

D	x	יממת כדור הארץ בשחרור, שעות	r_0 , ק"מ	a_0 , ק"מ	e_0	r_p , ק"מ	התרומה הגאותית הארצית ההתחלתית	גבול רש הקשיח, 10,314 ק"מ
2	1.00000	5.77	16,399	14,304	0.1464	12,209	התכווצות	עובר
2	1.05420	5.77	17,287	17,287	0	17,287	נייטרלית	עובר
2	1.06695	5.77	17,496	18,163	0.0367	17,496	התרחבות	עובר
2	1.08000	5.77	17,710	19,151	0.0752	17,710	התרחבות	עובר
2	1.10000	5.77	18,038	20,880	0.1361	18,038	התרחבות	עובר

המסלול ההתחלתי, כיוון הגאות והמרחק מגבול רש הקשיח לחמש נקודות שחרור, ביממה של 5.77 שעות ובקו רוחב 22.5° .

כיצד לקרוא את הטבלה: השורות מזיזות את נקודת השחרור החוצה מלמעלה למטה, והגוון מראה את כיוון הגאות — כחול למסלול שהגאות מושכת פנימה, שמנת לקו הקורטציה, שבו הגאות נייטרלית, ואדום, ההולך ומעמיק עם המרחק, למסלולים שהגאות דוחפת החוצה. בשורה הראשונה ($x = 1$, על הקו המשווני) הגוף איטי מדי, $e_0 = 0.1464 = \sin^2 22.5^\circ$, ונקודת השחרור היא האפוגאה: המסלול יורד לפריגאה של 12,209 ק"מ, הרבה בתוך מרחק השחרור. בשורה השנייה, על קו הקורטציה של 22.5° , הגאות נייטרלית, האקסצנטריות היא אפס

ושלושת המרחקים מתלכדים ב-17,287 ק"מ; המסלול המעגלי הוא נקודה אחת, מוגדרת היטב. השורה עם המספרים המודגשים היא השחרור שאומץ, כ-210 ק"מ מעבר לקו, שבו הגאות מרחיבה את המסלול מהרגע הראשון: הגוף מהיר מעט מדי, נקודת השחרור היא הפריגאה ($r_p = r_0 = 17\,496$ ק"מ), והמסלול כמעט מעגלי, $e_0 = 0.0367$, עם $a_0 = 18\,163$ ק"מ. בשתי השורות האחרונות הגוף מהיר עוד יותר והמסלול מתנופף החוצה ל- a_0 גדול יותר; האקסצנטריות גדלה בהתמדה בצדו השני של הנקודה המעגלית.

יממת השחרור של 5.77 שעות נובעת מן היממה ההתחלתית של 5.5 שעות: האגס המתארך מאט את כדור הארץ, והליבה המתמרכזת מאיצה אותו (מאמר 2, A.4§).

כיוון הגאות. הירח מעלה על כדור הארץ שתי בליטות גאות, אחת הפונה אליו ואחת בצד הרחוק. אילו כדור הארץ היה מסתובב בדיוק באותה מהירות שבה הירח מקיף אותו, הבליטות היו יושבות ישירות מתחת לירח, מושכות ישר לאורך הקו כדור הארץ-ירח, ולא מאיצות ולא מאטות את המסלול. אם כדור הארץ מסתובב מהר יותר משהירח מקיף אותו, החיכוך בתוך כדור הארץ נושא את הבליטה מעט לפני הירח; הבליטה הקרובה מושכת אז את הירח קדימה לאורך מסלולו, מוסיפה אנרגיה למסלול, והמסלול גדל — הירח מתרחק, כפי שהוא עושה היום. אם הירח מקיף מהר יותר משכדור הארץ מסתובב, הבליטה מפגרת אחריו, מושכת אותו לאחור, והמסלול מתכווץ, כפי שקורה היום לפובוס, הירח הפנימי של מאדים. המבחן שלהלן מכריע איזה משלושת המקרים חל בכל נקודת שחרור.

סימן ההתפתחות המסלולית הגאותית בטבלה חושב במודל של פיגור זמן קבוע, על ידי מיצוע ההספק על פני האליפסה; זהו מבחן מוגדר, לא כלל שאינו תלוי בראולוגיה. "פיגור זמן קבוע" פירושו שמניחים שהבליטה מגיבה למשיכה הגאותית לאחר שההייה קצרה וקבועה; "ראולוגיה" היא האופן שבו החומר של כדור הארץ משנה צורה ומפזר אנרגיה, וטיפול מלא היה צריך לפרט אותה. נספח A נותן את הנוסחה שמשחזרת את הסימן, במסגרת של גאות שיווי משקל וקטורית [S4]. הנוסחה, משוואה (14), משווה בין שני מספרים: משמאל, הקצב שבו כדור הארץ מסתובב סביב ציר המסלול, $\omega \cos i$, מחולק בקצב המסלולי הממוצע n ; מימין, גורם שתלוי רק באקסצנטריות ושווה 1 למעגל. בשורה הראשונה ההשוואה היא $0.7526 < 1.1962$, ולכן התרומה הארצית להתפתחות של a שלילית: הירח בממוצע מקדים את כדור הארץ המסתובב, והמסלול מתכווץ. על קו הקורוטציה, $x = 1.0542$, שני הצדדים שווים: המסלול סינכרוני והגאות נייטרלית. גוף שנמצא בדיוק על הקו הזה מקיף את כדור הארץ באותו זמן שכדור הארץ מסתובב מתחתיו, ולכן הבליטה שלו עומדת ישירות מתחתיו ואינה מפעילה מומנט לאורך המסלול. הירח משתחרר כ-210 ק"מ מעבר לקו, ב- $x = 1.0669$, ושם ההשוואה כבר $1.0769 > 1.0128$: (גרסה קודמת, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו, נתנה $1.0029 > 1.0357$), ולכן התרומה הארצית חיובית מהרגע הראשון (שורה $x = 1.08$: $1.0532 > 1.1660$). כדור הארץ מסתובב מהר יותר משהירח מקיף אותו, הבליטה מקדימה, והירח נדחף החוצה. ברגע שהירח מתחיל להתרחק, הקצב המסלולי שלו יורד עוד יותר מתחת לקצב הסיבוב של כדור הארץ, ולכן הדחיפה נמשכת; הקו הנייטרלי אינו יציב בכיוון החוצה, ומצב השחרור מוביל להתרחקות. גאות בתוך הירח עשויה לשנות את המאזן הכולל; גאות שכדור הארץ מעלה בתוך הירח אינה כלולה במבחן הסימן הזה (נספח A).

גבול רוש. גבול רוש הוא המרחק שבתוכו המשיכה הגאותית של כדור הארץ — ההפרש בין כבידתו על הצד הקרוב ועל הצד הרחוק של הירח — עולה על הכבידה העצמית של הירח ויכולה לפרק אותו. מבחן רוש נעשה עם הגבול הקשיח,

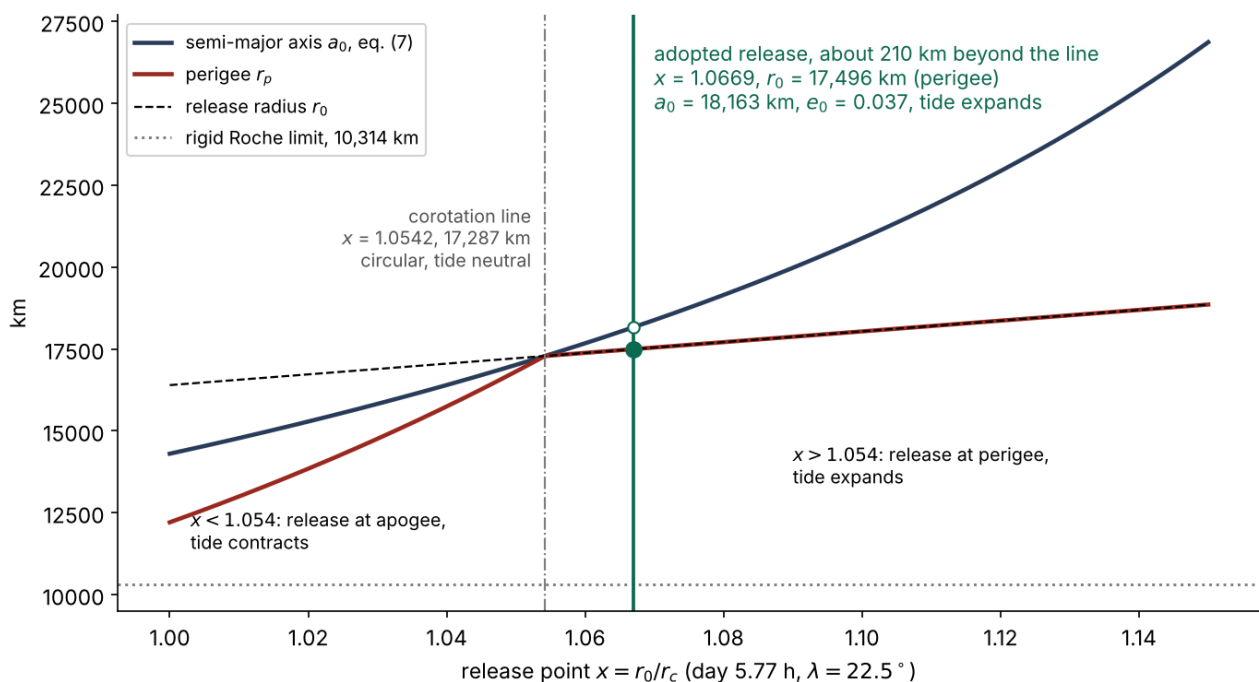
$$r_{\text{Roche, rigid}} = 1.26 \left(\frac{3M_{\oplus}}{4\pi\rho_m} \right)^{1/3} \simeq 10\,314 \text{ km},$$

כי הגוף קשיח ועגול ברגע השחרור (מאמר 2, B.7§). כאן ρ_m היא צפיפות הירח; ככל שהגוף צפוף יותר, הוא (8) יכול להתקרב יותר בלי להיקרע. כל השורות נמצאות מחוץ לגבול; השחרור שאומץ נמצא כ-7,200 ק"מ מעבר לו

גרסאות קודמות, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו ועם שחרור על הקו, נתנו 7,100 ק"מ ו-7,000 ק"מ). גם הפריגאה של השורה הראשונה, 12,209 ק"מ, נשארת מחוץ לגבול.

מומחה ישאל מדוע הגבול הקשיח, ולא הנוזלי, הוא הממד הנכון: לגוף שמשנה צורה בחופשיות הגבול רחוק יותר (כ-19,971 ק"מ לצפיפות 2,600 ק"ג/מ"ק, מאמר 2, A.7.1§), מעבר לרדיוס השחרור. התשובה נמצאת במצב הגוף. הירח ברגע השחרור עגול והקליפה החיצונית שלו קשיחה: יחס הצירים שלו הוא לכל היותר 1.04 (מאמר 2, B.7§). הפחיסות וההתעגלות המאוחרת של הגוף הירחי התרחשו קודם לכן, בזמן שעוד היה מחובר (מאמר 7, הקטבים). גוף עם קליפה קשיחה אינו נמתח לאורך ציר הגאות כפי שטיפה נוזלית הייתה נמתחת, והגבול הקשיח הוא זה שחל עליו.

איור 1 מראה את אותן תוצאות כעקומה רציפה במקום ארבע שורות, כדי שהקורא יוכל לראות היכן נמצאים קו הקורטציה והשחרור שאומץ בין כל נקודות השחרור האפשריות.



איור 1. המסלול ההתחלתי כפונקציה של נקודת השחרור, ביממה של 5.77 שעות ובקו רוחב 22.5° . מתחת ל- $x = 1.054$ הגוף משתחרר באפוגאה והגאות מכווצת את המסלול; ב- $x = 1.054$, קו הקורטציה, המסלול מעגלי והגאות נייטרלית; מעבר לכך הגוף משתחרר בפריגאה ומתרחק. השחרור שאומץ, כ-210 ק"מ מעבר לקו ב- $x = 1.067$, מסומן: פריגאה 17,496 ק"מ, $a_0 = 18,163$ ק"מ, $e_0 = 0.037$. כל נקודה נמצאת מחוץ לגבול רוש הקשיח.

B.3 מצב השחרור

הירח מתחיל להיפרד כאשר מרכז המסה שלו מגיע לרדיוס הקורטציה המתוקן לקו הרוחב, 17,287 ק"מ, ומשתחרר כ-210 ק"מ מעבר לו, ב-17,496 ק"מ, כשמעט יותר ממחציתו חצתה את הקו. המגע מתנגד מעט, והגוף נמשך החוצה בכוח. כשהוא משתחרר שם, הוא נע מעט מהר יותר ממה שמסלול מעגלי דורש: נקודת השחרור היא הפריגאה של מסלול כמעט מעגלי ($e_0 \approx 0.037$, אפוגאה 18,830 ק"מ), הפריגאה נמצאת מעבר לקו הסינכרוני, והירח מתרחק כבר מן ההקפה הראשונה. אילו המשיכה החוצה הייתה נותנת לגוף גם מהירות רדיאלית קטנה, האקסצנטריות הייתה גדולה במקצת, אבל הנטייה לא הייתה משתנה (A.2§). הניתוק עצמו מתואר במאמר 3.

כיצד מרחק השחרור נכנס. המרחק מעבר לקו קובע את צורת המסלול הראשון, ודרך גודלו — את הזווית הסופית. הזזת השחרור החוצה מגדילה את יחס המהירויות B , ואיתו את e_0 ואת a_0 ; הזווית הסופית של החוק

המצומצם גדלה לאט עם a_0 . מאמר 3, C.5a§, נותן את החיפוש המלא; ארבע משורותיו ב-22.5° מראות את המגמה:

המרחק מעבר לקו (ק"מ)	e_0	a_0 (ק"מ)	הזווית הסופית
0	0	17,287	5.020°
100	0.017	17,696	5.079°
כ-210 (שאומץ)	0.037	18,163	5.145° (נצפה)
500	0.089	19,531	5.334°

טבלה B.3. המסלול ההתחלתי והזווית הסופית של החוק המצומצם ככל שהשחרור מתרחק מעבר לקו הקורטציה ב-22.5° (מאמר 3, C.5a§). הכחול-כהה מעמיק עם הזווית הסופית; הירוק מסמן את השחרור שאומץ, שמחזיר את 5.145° הנצפים.

שחרור בדיוק על הקו היה נותן מעגל, והגאות נושאת מעגל החוצה כמעגל; האקסצנטריות של היום דורשת אפוא שחרור מעט מעבר לקו. במאמר 3 אותו מרחק, כ-210 ק"מ, מחזיר גם את האקסצנטריות של היום, 0.0549, לירח צעיר וחם; שני המבחנים המצומצמים נפגשים שם, והאינטגרציה המלאה של העבודה העתידית, סעיף 1, נושאת את מצב השחרור דרך ההיסטוריה כולה.

שלושת התנאים שנשאלו בראש חלק זה מתקיימים אפוא יחד: המסלול כמעט מעגלי, הגאות מזיזה אותו החוצה, והגוף נמצא הרחק מן הגבול שבו היה נקרע.

תוצאה

מה שמתקבל הוא נקודת המוצא המסלולית: $a_0 \simeq 18\,200$ ק"מ ($18,163$ ק"מ), $e_0 \simeq 0.037$ כשהפריגאה בנקודת השחרור, $17,496$ ק"מ, ו- $i_0 = 22.5^\circ$ ביחס למשווה של אותו זמן. (גרסאות קודמות, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו ועם שחרור על הקו, נתנו $a_0 = 17\,696$ ק"מ, $e_0 \simeq 0.017$, ו- $a_0 = 17\,287$ ק"מ, $e_0 \simeq 0$).

שלושת המספרים האלה הם הקלט לכל מה שבא אחריהם: חלק C עוקב אחר האופן שבו מישור המסלול הזה מסתובב בזמן שהוא נע החוצה, וחלק D אחר השאלה כמה מן ה-22.5° שורד עד המרחק הנוכחי.

חלק C — כיצד משתנה מישור המסלול בדרך החוצה?

הבעיה

הנטייה ההתחלתית נמדדת ביחס למשווה הקדום; הנטייה של היום נמדדת ביחס למישור המילקה. אנו מזהים את הכוחות שמסובבים את מישור המסלול, ומקפידים להבחין בין שני מישורי הייחוס.

חלק B הסתיים במסלול הנטוי ב- 22.5° למשווה של כדור הארץ באותו זמן. ה- 5.145° הנצפים נמדדים ביחס למישור אחר, *מישור המילקה* (האקליפטיקה) — המישור של מסלול כדור הארץ סביב השמש. חלק זה מסביר מדוע מישור הייחוס משתנה בזמן שהירח מתרחק, ומה צריך לדעת כדי לעקוב אחר השינוי הזה. הדבר חשוב, כי השוואה בין זווית שנמדדה ממישור אחד לזווית שנמדדה ממישור אחר היא השוואה בין שני גדלים שונים.

C.1 המשווה, מישור המילקה ומשטח לפלס

מסלול נטוי אינו שומר על כיוון קבוע במרחב. כוחות חיצוניים מפתלים אותו, כך שציר המסלול מקיף לאט כיוון ייחוס כלשהו, כמו ציר של סביבון נטוי המקיף את האנך; הסיבוב האיטי הזה נקרא *נקיפה* (פרצסיה), והנטייה נמדדת מן המישור שסביבו היא מתרחשת. קרוב לכדור הארץ, הפחיסות של כדור הארץ משפיעה בחוזקה על סיבוב מישור המסלול: הבליטה המשוונית של כדור הארץ מושכת את המסלול לעבר המשווה, והמסלול נוקף סביב מישור המשווה. רחוק יותר, ההפרעה של השמש גדלה בחשיבותה, והמסלול נוקף סביב מישור המילקה, כפי שמסלול הירח עושה היום. משטח לפלס מתאר את כיווני שיווי המשקל של מישור המסלול תחת שתי ההשפעות יחד: בכל מרחק הוא המישור שסביבו המסלול נוקף. קרוב לכדור הארץ הוא מתלכד עם המשווה של כדור הארץ; רחוק, עם מישור המילקה; ובין לבין הוא מתכופף מן האחד אל השני. בזמן שהירח מתרחק, המישור שביחס אליו נמדדת בפועל נטייתו מסתובב אפוא מן המשווה אל מישור המילקה. קנה המידה המקובל למעבר, בקירוב המעגלי והקוודרופולי, הוא [S5]:

$$r_L = \left(\frac{2J_2 R_\oplus^2 a_\oplus^3 M_\oplus}{M_\odot} \right)^{1/5}.$$

כאן J_2 הוא המספר שמודד את הבליטה המשוונית של כדור הארץ בשדה הכבידה שלו, $R_\oplus$ רדיוס כדור הארץ, $a_\oplus$ המרחק כדור הארץ-שמש ו- $M_\odot$ מסת השמש. המשווה נותנת את המרחק שבו השפעת הפיתול של הבליטה של כדור הארץ והשפעת השמש שוות בערך: בתוך r_L הבליטה שולטת, מחוצה לו השמש. בליטה גדולה יותר דוחפת את המעבר החוצה, אם כי רק במידה חלשה, דרך השורש החמישי.

הביטוי הזה מראה מה צריך לדעת: את המומנט הכבידתי $J_2 R_\oplus^2$, ולא רק את זמן הסיבוב. הליבה, הצורה וההתקררות משפיעות על הקשר בין השניים. כדור ארץ שמסתובב מהר יותר בולט יותר, אבל בכמה יותר — תלוי באופן שבו המסה שלו מפולגת בפנים.

בדיקת סדר גודל בלבד, עם רדיוס כדור הארץ הנוכחי ו- $J_2 = J_{2,\text{now}} (\omega/\omega_{\text{now}})^2$ — כלומר בהנחה שהבליטה גדלה עם ריבוע קצב הסיבוב, כפי שפחיסות סיבובית גדלה — נותנת כ-17.07 רדיוסי כדור הארץ ליממת השחרור של 5.77 שעות. רדיוס השחרור של 17,496 ק"מ הוא כ-16.1% מקנה המידה הזה (גרסאות קודמות, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו ועם שחרור על הקו, נתנו 16.0% ו-15.9%), בערך שיטית מן הדרך אל המעבר (השחרור ב- $x = 1.08$ מחלק 17,710 B, ק"מ, היה כ-16.3%). הירח מתחיל אפוא את מסעו החוצה הרבה בתוך האזור שבו הבליטה של כדור הארץ שולטת במישור, וה- 22.5° שלו נמדדות, בתחילה, ביחס למשווה. הבדיקה

תומכת בהתחלה באזור שבו הפחיסות חשובה; היא אינה מחליפה חישוב של J_2 מן המבנה הקדום, ואינה קובעת כיצד רדיוס המעבר התפתח עם הזמן.

C.2 מתי אפשר להשתמש בקירוב האדיאבטי?

בזמן שהירח מתרחק, משטח לפלס במקומו נוטה בהדרגה מן המשווה לעבר מישור המילקה. השאלה היא אם המסלול עוקב בצורה חלקה אחר המישור המסתובב הזה, ושומר על נטייתו ביחס אליו. שינוי "אדיאבטי" הוא שינוי איטי דיו כדי שהמסלול ישלים מחזורי נקיפה רבים בזמן שהמישור המנחה מסתובב רק מעט; במקרה כזה המסלול נוטה לעקוב אחר המישור, בדומה לסביבון שממשיך להקיף משענת שמוטים אותה לאט.

אם משטח שיווי המשקל משתנה לאט ביחס למחזורי הנקיפה, אפשר לחפש פעולה אדיאבטית נשמרת. אין בכך כדי לומר שזווית הנטייה נשמרת בדיוק בכל מסלול אקסצנטרי ובעל נטייה סופית. משטח לפלס הקלאסי מוגדר למסלולים מעגליים; גם סף אי-היציבות של כ- 68.875° שייך למסגרת המוגדרת הזו [S5]. (הסף הזה הוא הנטייה של ציר הסיבוב של הפלנטה שמעליה, באזור המעבר, מסלולים המונחים על משטח לפלס הקלאסי הופכים לבלתי יציבים.)

המבחן הנדרש משלב את נטיית ציר כדור הארץ באותו זמן, את קו הצמתים, את האקסצנטריות, את קצב ההתרחקות ואת התפתחות השדה. קו הצמתים הוא הקו שלאורכו מישור המסלול חוצה את מישור הייחוס; הכיוון שלו ביחס לשמש מכריע לאיזה כיוון המישור מפותל. הנטייה של כדור הארץ היום אינה קלט מוכח לעבר. האופן שבו ציר כדור הארץ ומסלול הירח התפתחו יחד לאחר השחרור — מערכת הצירים כדור הארץ-ירח — אינו נפתר בסדרה זו; זו עבודה עתידית. לכן אין לקבוע מן החישוב המצומצם מעבר ב-14.8 רדיוסי כדור הארץ, או "העברה מדויקת" של הזווית המשוונית לזווית ביחס למישור המילקה.

C.3 הצורה המאובנת ומצב קסיני

שתי תכונות נוספות של הירח הנוכחי רושמות את מעברו החוצה. הצורה המאובנת היא הצורה הנוכחית של הירח, הפחוסה יותר ממה שהסיבוב והמרחק הנוכחיים שלו היו יוצרים; היא נקראת כצורה שהוקפאה כשהירח היה קרוב יותר והסתובב מהר יותר. מצב קסיני הוא תצורה שבה ציר הסיבוב של הירח, ציר המסלול שלו וציר המישור שסביבו המסלול נוקף נשארים במישור אחד בזמן שהם נוקפים יחד; בזמן שהירח התרחק הוא עבר ממצב כזה אחד לאחר.

הצורה המאובנת של הירח והמעבר בין מצבי קסיני הם אילוצים נוספים, לא שלבים אבולוציוניים שמקומם במסלול נקבע על ידי קו הרוחב של השחרור. מודל תרמי-מסלולי של Matsuyama ו-Downey, Nimmo מצא הקפאה של הצורה לפני כ-16 רדיוסי כדור הארץ בתנאים שנבדקו [S6]. לכן 21.6 רדיוסי כדור הארץ אינו רדיוס הקפאה יחיד הנגזר מן התצפית, והסדר "לפלס, הקפאת הצורה, קסיני" אינו תוצאה כללית.

גם השוואה בין שני קצבי נקיפה מבודדים אינה מוכיחה תהודה חדשה ב-17–19 רדיוסי כדור הארץ. מעבר כזה דורש את התדירויות של המערכת המצומדת, כולל השמש והתגובה של שני וקטורי התנע הזוויתי. המאמר אינו טוען שתעלה ליצירת נטיית ציר פתוחה רק למסלול של LEF.

מה שיש לנו עכשיו: הירח מתחיל עם 22.5° הנמדדות מן המשווה של כדור הארץ, באזור שבו המשווה שולט במישור; העברת הנטייה הזו אל מישור המילקה, והשלבים שהיא עוברת בדרך, נקבעים באינטגרציה מלאה שכוללת את הבליטה של כדור הארץ, את השמש ואת הצירים של שני הגופים. חלק D פונה לשאלה כמה נטייה הגאות מסירה בדרך.

חלק D — כמה מן הנטייה שורד, ובאיזה זמן?

הבעיה

התאמה לזווית אחת אינה מספיקה אם החישוב משתמש במסלול התחלתי שגוי או מגיע למרחק הנוכחי בזמן הלא נכון. אנו פותרים במדויק את מודל הדעיכה המצומצם ומשווים אותו לאילוצים התרמיים והמסלוליים.

הגאות שדוחפת את הירח החוצה פועלת גם על נטיית מסלולו, ומקטינה אותה בזמן שהירח מתרחק. חלק זה לוקח את החוק הפשוט ביותר שמתאר את ההקטנה הזו, פותר אותו במדויק ממצב השחרור של חלק B, ואחר כך בודק אותו מול הדרישה השנייה שכל היסטוריה מסלולית צריכה לעמוד בה: להגיע למרחק הנוכחי בזמן העומד לרשותה.

D.1 מה משוואת הדעיכה אומרת בפועל

נתבונן בחוק ההמחשה, כאשר i נמדדת מן המשווה של כדור הארץ (המעבר אל מישור המילקה הוא נושא חלק C):

$$\frac{di}{da} = -\frac{1+\epsilon}{2a} \sin i \cos i.$$

במילים: כל צעד קטן החוצה, da , מקטין את הנטייה בכמות קטנה. סימן המינוס אומר שהנטייה יורדת (10) כשהמסלול גדל; הגורם $1/a$ אומר שצעדים יחסיים שווים במרחק נחשבים במידה שווה; והגורם $\sin i \cos i$ אומר שההקטנה מתאפסת למסלול במשווה ($i = 0$) והיא הגדולה ביותר בנטיית ביניים.

כאן ϵ הוא מקדם ריסון נוסף במודל מצומצם, לא פתרון לראולוגיה של הירח. הוא מייצג כל אובדן נוסף של נטייה, למשל מפיזור אנרגיה בתוך הירח; $\epsilon = 0$ פירושו שרק האיבר הגאותי הבסיסי פועל. לערך קבוע, האינטגרל המדויק הוא:

$$\tan i(a) = \tan i_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(1+\epsilon)/2}.$$

זאת משום ש- $d \ln(\tan i) / di = 1/(\sin i \cos i)$. זהו חוק הטנגנס: הטנגנס של הנטייה יורד כהופכי של (11) השורש הריבועי של המרחק (עבור $\epsilon = 0$). אם המרחק גדל פי ארבעה, הטנגנס של הנטייה קטן בחצי. החלפת הטנגנס בסינוס נותנת משוואה אחרת; זהו קירוב אפשרי רק בזוויות קטנות, שבהן השניים כמעט שווים, והוא אינו מדויק בזווית התחלתית של 22.5° .

להמחשה, נציב $i_0 = 22.5^\circ$, $\epsilon = 0$ (המרחק הממוצע הנוכחי בין כדור הארץ לירח). מחצי הציר הגדול ההתחלתי, כ-18,200 ק"מ, ל-384,400 ק"מ המרחק גדל פי 21 בערך, ולכן $\tan i$ קטן פי 4.6 בערך:

תנאי ההצבה	a_0 , ק"מ	הזווית הסופית במשוואה (11)	מה אפשר להסיק
מצב השחרור ($\lambda = 22.5^\circ$), כ-210 ק"מ מעבר לקו, $(e_0 \approx 0.037)$	18,163	5.145°	שווה ל- 5.145° הנצפים; המסלול מתחיל בהתרחקות (חלק B)

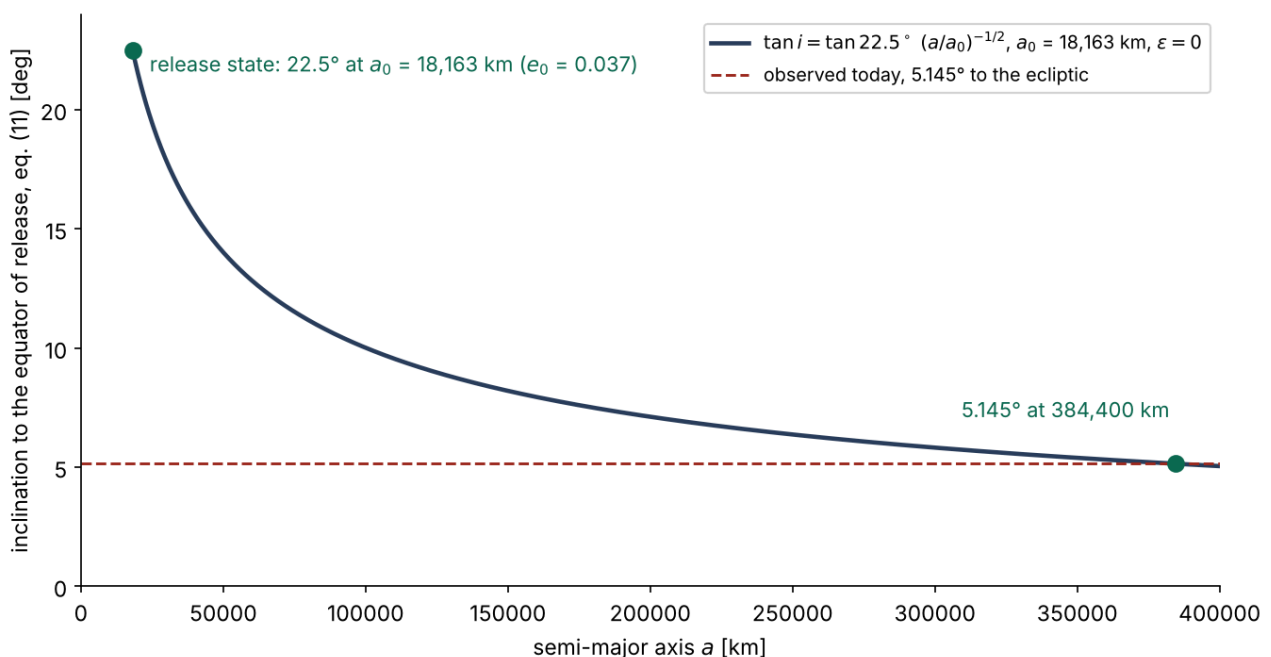
שחרור 8% מעבר לקו	19,151	5.282°	רגישות חלשה לנקודת השחרור
אותו שחרור ב-25° λ	18,163	5.788°	רגישות לקו הרוחב

הזווית הסופית לפי חוק הטנגנס, משוואה (11), עם $\epsilon = 0$, כשמשינים קלט אחד בכל פעם ממצב השחרור.

הטבלה משנה קלט אחד בכל פעם ממצב השחרור, והגוון ההולך ומעמיק מסמן את הסטייה הגדלה של הזווית הסופית מן השורה הראשונה. השורה הראשונה היא מצב השחרור של חלק B. השנייה משתמשת בשחרור ב- $x = 1.08$ מטבלת חלק 8%, מעבר לקו המשווני, שחצי הציר הגדול שלו הוא 19,151 ק"מ: חצי ציר גדול שגדול בכ-5% מזה שאומץ משנה את הזווית הסופית רק בכשביעית מעלה. השלישית שומרת על מרחק השחרור ומעלה את קו הרוחב ההתחלתי ל-25°, כמקרה רגישות; הזווית הסופית עולה בכשני שלישים של מעלה. (גרסאות קודמות, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו ב- $a_0 = 17,696$ ק"מ ועם שחרור על הקו ב- $a_0 = 17,287$ ק"מ, נתנו 5.079° ו- 5.713° ו- 5.020° ו- 5.648° , לשורה הראשונה ולשלישית.) הזווית הסופית נקבעת אפוא בעיקר על ידי קו הרוחב של השחרור, כפי שמשוואה (11) מראה: הוא נכנס דרך $\tan i_0$, בעוד שהמרחק ההתחלתי נכנס רק דרך שורש ריבועי.

כל השורות בוחנות את אותה משוואה מצומצמת. הן אינן מבצעות אינטגרציה של ההתפתחות דרך המעברים של מישור לפלס ומצבי קסיני, אינן כוללות את התפתחות האקסצנטריות, ואינן מבססות חיזוי של הנטייה ביחס למישור המילקה. בפרט, ההתאמה של הזווית הסופית ל- 5.145° היא תוצאה של החוק המצומצם למסלול שמתחיל בהתרחקות; היא עדיין אינה אינטגרציה דרך המעברים. קו הרוחב שבו החוק הזה מחזיר 5.145° מן השחרור שאומץ, $a_0 \approx 18,200$ ק"מ, הוא קו הרוחב של הסדרה עצמו, 22.5° (גרסאות קודמות נתנו 22.8° עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו, 23.0° עם שחרור על הקו, ולפני כן טווח של 23.3° – 24.6°). קו הרוחב ומרחק השחרור מתחלפים זה בזה — חצי מעלה של קו רוחב מזיזה את המרחק המתאים בכ-200 ק"מ (מאמר 3, §C.5a) — ולכן ההתאמה נקראת יחד עם מבחן האקסצנטריות של מאמר 3, ולא מן הזווית לבדה.

איור 2 משרטט את חוק הטנגנס כעקומה ממצב השחרור ועד המרחק הנוכחי.



איור 2. חוק הדעיכה המצומצם של חלק D ממצב השחרור ($a_0 = 18,163$ ק"מ, $i_0 = 22.5^\circ$, $e_0 = 0.037$): 5.145° במרחק הנוכחי, הערך הנצפה. משוואה אחת, ללא מעבר לפלס או קסיני, ללא התפתחות של האקסצנטריות.

העקומה יורדת בתלילות קרוב לכדור הארץ ומשתטחת הלאה ממנו: רוב הנטייה אובדת בחלק הראשון של המסע, שבו כל קילומטר הוא חלק גדול מן המרחק, והקטע האחרון עד המרחק הנוכחי משנה את הזווית מעט.

D.2 מדוע ביטול Q אינו פותר את ההיסטוריה התרמית

עוצמת הגאות מתוארת בדרך כלל בשני מספרים. מספר k_2 מודד עד כמה גוף משנה צורה תחת משיכה גאותית: 0 לגוף קשיח לחלוטין, גדול יותר לגוף רך יותר. מקדם האיכות הגאותי Q מודד כמה מאנרגיית הגאות אובדת לחיכוך בכל מחזור: Q נמוך פירושו חיכוך חזק, בליטה הנישאת הרחק מן הקו אל הירח, והתפתחות גאותית מהירה; Q גבוה פירושו חיכוך חלש והתפתחות איטית. $Q_{\oplus}$ הוא הערך של כדור הארץ.

כאשר אותה פונקציית קצב מכפילה גם את $\dot{a}$ וגם את $\dot{i}$, היא מצטמצמת בחלוקת המשוואות. זה מסביר את אי-התלות המפורשת ב- $Q_{\oplus}$ בתוך חוק ההמחשה: משוואה (10) קושרת את הנטייה למרחק, לא לזמן, ולכן היא נותנת אותה זווית סופית בכל מהירות של התרחקות. אבל אם ϵ תלוי במצב ההתכה בזמן ההגעה למרחק נתון, שינוי בקצב ההתרחקות משנה את מצב ההתכה שמושג באותו מרחק, ולכן את מקדם הריסון. תמונה יומיומית: המסלול של מכונית בין שתי ערים אינו תלוי במהירותה, אלא אם הכבישים משתנים עם הזמן; אז המהירות מכריעה אילו כבישים פתוחים כשהמכונית מגיעה אליהם. בנוסף, פיזור האנרגיה בירח אינו חייב להיות כפולה קבועה של הגאות הארצית.

Nimmo ו-Chen מצאו במודלים שבדקו מגבלה חזקה על הישרדות הנטייה, ודרישה ל- $Q_{\oplus} > 300$ בתרחישים מתאימים [S7]. זהו אילוץ של מודל, לא סף כללי לכל מצב חומר. גם התמצקות אינה מכבה את הגאות: גוף מוצק יכול לפזר אנרגיה. מודלים הכוללים פיזור אנרגיה במוצק ובאוקיינוס מאגמה מחדדים את התנאים שבהם נטייה קדומה שורדת [S6]. ההיסטוריה התרמית של שני הגופים היא אפוא חלק מבעיית הנטייה, והחוק המצומצם, בכך שהוא מבטל את Q , אינו מכריע אותה.

D.3 מבחן שעון אחד מספיק כדי לחשוף את הגבול

חוק הטנגנס אינו אומר דבר על הזמן. "מבחן השעון" מספק אותו: הוא שואל אם חוק גאות פשוט, המורץ החוצה ממצב השחרור, מביא את הירח למרחק הנוכחי בגיל המערכת וגם עם קצב ההתרחקות הנוכחי. שני התנאים צריכים להתקיים יחד.

אנו משתמשים, להמחשה בלבד, בחוק מעגלי-משווני בכיוון החוצה, עם פרמטרים קבועים:

$$\dot{a} = Aa^{-11/2}, \quad A = 3 \frac{k_2}{Q_{\oplus}} \frac{m}{M_{\oplus}} \sqrt{GM_{\oplus}} R_{\oplus}^5.$$

במילים: קצב ההתרחקות $\dot{a}$ יורד בתלילות רבה עם המרחק, כ- $a^{-11/2}$, כי בליטת הגאות נחלשת במהירות (12) ככל שהירח מתרחק. הקבוע A מקבץ את עוצמת הגאות של כדור הארץ, $k_2/Q_{\oplus}$, את יחס המסות של הירח לכדור הארץ ואת גודל כדור הארץ; $k_2/Q_{\oplus}$ גדול יותר פירושו התרחקות מהירה יותר.

מכאן:

$$t(a_f) - t(a_0) = \frac{2}{13A} \left(a_f^{13/2} - a_0^{13/2} \right).$$

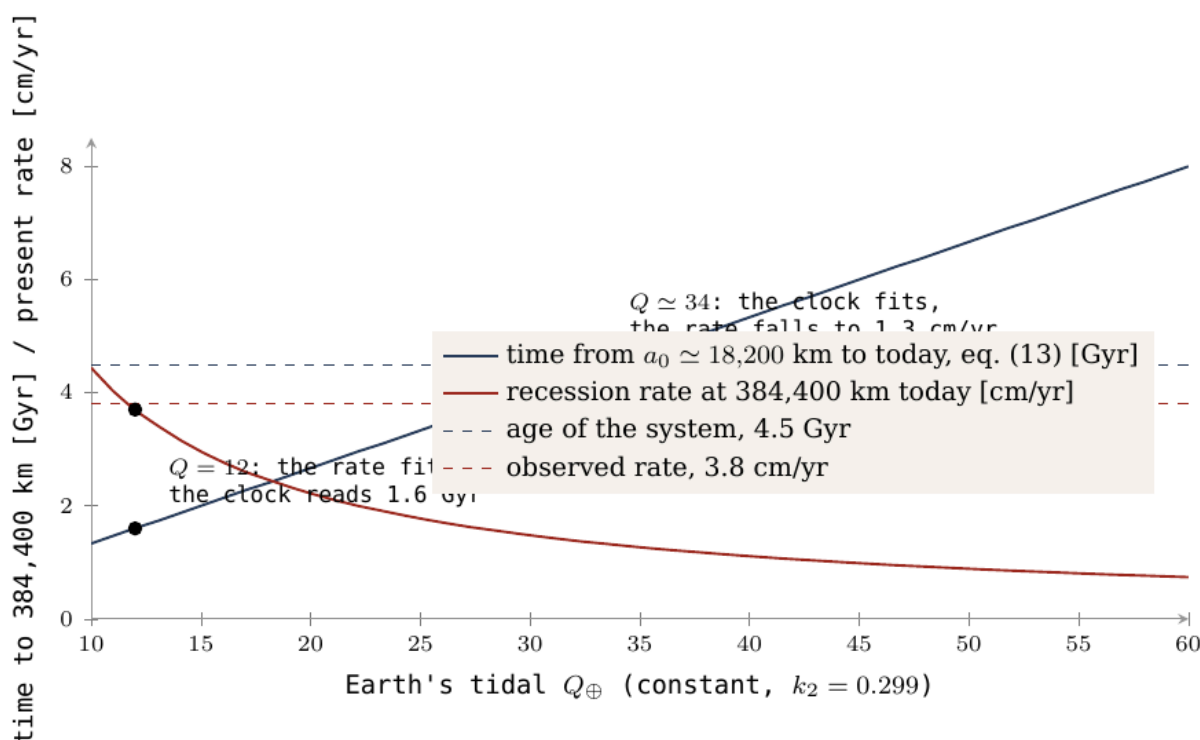
זהו הזמן לעבור ממרחק השחרור a_0 למרחק סופי a_f . בגלל החזקה הגבוהה $13/2$, האיבר של a_f גדול לאין (13) שיעור מן האיבר של a_0 : כמעט כל הזמן מושקע בחלק האיטי והמאוחר של המסע, והזמן שחולף כמעט אינו תלוי במקום שבו הירח התחיל. עם זאת הוא ביחס הפוך ל- A , ולכן ביחס ישר ל- $Q_{\oplus}$.

עבור $k_2 = 0.299$, $Q_{\oplus} = 12$, $R_{\oplus} = 6371 \text{ km}$ ו- $a_0 \simeq 18200 \text{ km}$, מתקבלים כ-1.60 מיליארד שנה עד המרחק הנוכחי וכ-3.70 ס"מ לשנה במרחק הזה. הקצב הנוכחי קרוב לתצפית, אבל הזמן שחולף אינו משחזר 4.5

מיליארד שנה. הגדלת Q כדי להתאים את הזמן שחולף מקטינה את הקצב הנוכחי באותו יחס. הזמן גדל ביחס ל- Q והקצב הנוכחי יורד ביחס ל- $1/Q$, ולכן שום ערך קבוע יחיד של Q אינו יכול להתאים לשניהם.

זהו מבחן כיול של חוק פשוט, לא היסטוריה של כדור הארץ הקדום. החוק גם אינו תקף כשלעצמו באליפסה הנטויה של חלק B או קרוב לסינכרוניות. היסטוריות משתנות של פיזור אנרגיה ותהודות אוקייניות הן הנושא של מודלים מסלוליים מפורטים [S8]: האוקיינוסים של כדור הארץ מגיבים לגאות לפי צורת האגנים שלהם ואורך היממה, ויכולים לעבור דרך תהודות שבהן התגובה חזקה באופן חריג, כך שהקצב הנוכחי אינו חייב להיות הממוצע לטווח הארוך. אם הבנייה נמשכה חלק ניכר מן התקופה הקדומה, יש לחשב את הזמן העומד לרשות ההיסטוריה שאחרי הניתוק מאותו תאריך, במקום להוסיף אוטומטית 4.5 מיליארד שנה אחרי הניתוק. בסדרה, הבנייה נמשכת כ-600 מיליון שנה מתחילת הבליטה ועד השחרור ב-3.873 מיליארד שנה לפני זמננו, ולכן הזמן העומד לרשות אחרי השחרור הוא כ-3.9 מיליארד שנה, לא 4.5. מול 3.87 מיליארד שנה השעון מתאים ב- $Q_{\oplus} \approx 29$, ושם הקצב הנוכחי יורד לכ-1.5 ס"מ לשנה; המסקנה זהה.

איור 3 מראה את מבחן השעון לכל Q קבוע בין 10 ל-60.



איור 3. שעון אחד עם Q קבוע אינו יכול להתאים גם לקצב ההתרחקות הנוכחי וגם לגיל המערכת (חלק D.3): הערך שמשחזר 3.8 ס"מ לשנה מגיע למרחק הנוכחי ב-1.6 מיליארד שנה, והערך שממלא 4.5 מיליארד שנה נותן קצב נוכחי קטן פי שלושה מדי. היסטוריית פיזור האנרגיה הייתה חייבת להשתנות, וזה מה שמודלים מפורטים מוצאים [S8].

כיצד לקרוא את איור 3: הקו הכחול העולה הוא זמן המסע, שגדל עם Q ; הקו האדום היורד הוא קצב ההתרחקות הנוכחי, שיורד עם Q . כל קו רציף צריך לפגוש את המטרה המקווקוה שלו, ושתי הפגישות מתרחשות בערכים שונים של Q — קרוב ל-12 לקצב וקרוב ל-34 לגיל. היסטוריה עם Q קבוע יחיד אינה יכולה לעמוד בשתי הנקודות בבת אחת.

מה שיש לנו עכשיו: חוק הטנגנס מוביל את קו הרוחב של השחרור, 22.5° , ל- 5.145° במרחק הנוכחי, הערך הנצפה, ומבחן השעון מראה שהזמן שהדבר אורך נקבע על ידי פיזור אנרגיה שהשתנה לאורך ההיסטוריה. התשובה המלאה היא אינטגרציה תרמית-מסלולית מצומדת ממצב השחרור, והיא רשומה תחת עבודה עתידית.

חלק E — מה הוכח ומה ייבדק?

הבעיה

יש להבחין בין זהות מתמטית, ענף מסלולי אפשרי ושחזור תצפיתי. הטבלה מגדירה לכל טענה את התנאים שלה, את התוצאה הכמותית ואת המבחן, כך שהערכת המאמר לא תישען על התאמה חזותית או מילולית.

חלקים A–D הובילו את הירח מרגע השחרור ועד שאלת המסלול של היום. חלק זה מרכז במקום אחד את מה שהחלקים האלה מבססים, וכיצד אפשר לבדוק כל תוצאה. ההבחנה שבתביבה שלמעלה חשובה, משום ששלושת סוגי התוצאה נבדקים בדרכים שונות. זהות, כמו $i_0 = |\lambda|$, מתקיימת בכל מקום שבו הקלטים שלה מתקיימים; מה שנבדק הוא רק שהיא מיושמת במקומה. ענף מסלולי, כמו מצב השחרור של חלק B, הוא פתרון אחד מבין הפתרונות שהמשוואות מתירות, ומה שנבדק הוא שהתנאים שהוא דורש מתקיימים. שחזור, כמו הנטייה של היום, מחייב אינטגרציה מלאה לאורך כל ההיסטוריה של המערכת, ומה שנבדק הוא שהיסטוריה מותרת משחזרת את התצפיות.

לטבלה שורה אחת לכל טענה. היא נקראת לפי סדר העמודות: הטענה; מה היא מניחה; המספר או הסימן שהיא חוזה; וכיצד בודקים את התחזית הזאת. גוון השורות עוקב אחר מעמד הטענה, מלמעלה למטה: כחול לזהות גאומטרית, שמנת לתוצאה שחושבה במאמר הזה, אדום לתוצאה הדורשת את האינטגרציה המנויה תחת “עבודה נוספת”. השורות נעות אפוא ממה שכבר קבוע אל מה שעוד יש לחשב.

טענה	הנחות	ציפייה כמותית	מבחן
מקור הנטייה — זהות גאומטרית	שחרור מקומי, מהירות משיקית מזרחה, קו הרוחב ביחס לציר ברגע השחרור	$i_0 = \lambda $	וקטורי מרכז המסה בסוף הניתוק
האליפסה ההתחלתית — מכניקת שני גופים	שני גופים, $v_r = 0$, $0 < B < 2$	משוואות (6)–(7)	השוואה לאינטגרציה מסלולית קצרה
התרחקות התחלתית — חושבה (B.2§)	תנאי השחרור והראולוגיה הגאותית, שהוגדרו מראש	$\langle \dot{a} \rangle > 0$	ממוצע ההספק משתי מערכות הגאות
שרידות — מבחן רוש עבר (B.2§); בדיקת העיוות פתוחה	צפיפות, חוזק ומצב תרמי התואמים את הבנייה	הגוף שורד את הפריגיאות הראשונות	בדיקת עיוות, התחממות ואובדן מסה
הנטייה של היום — דורשת אינטגרציה	היסטוריה משותפת של צירים, Cassini, Laplace ופיזור אנרגיה	כ- 5.145° למישור המילקה, לצד האקסצנטריות של היום	אינטגרציה תרמית-מסלולית וקטורית
מרחק ושעון — דורשים אינטגרציה	מועד ניתוק ופיזור תלוי-זמן התואמים זה את זה	כ- $384,400$ ק"מ וכ- 3.8 ס"מ לשנה היום	התאמה משותפת לנתונים ולאיילוצי הזמן
הקשר הגאוגרפי — דורש שחזור בלתי תלוי	שחזור קו הרוחב הקדום של מרכז המסה	קו רוחב בלתי תלוי, עם טווח אי-ודאות	שחזור מבני וסיבובי שאינו מותאם למסלול

במילים פשוטות, כל טענה והמבחן שלה:

- **מקור הנטייה.** הטענה היא שגוף המשתחרר בקו רוחב λ בעודו מסתובב מזרחה עם כדור הארץ, מתחיל במסלול הנוטה ב- λ למשווה של אותו זמן (A.2§). המבחן הוא מהירות מרכז המסה בסוף הניתוק: הזהות חלה כל עוד המהירות הזאת אינה נושאת רכיב צפון-דרום משמעותי, ושום מומנט בזמן הניתוק אינו מסובב את מישור המסלול. הזהות נמדדת ביחס למשווה הקדום, ולכן אין משוואות אלה ישירות ל- 5.145° של היום, הנמדדים ביחס למישור המילקה — המישור של מסלול כדור הארץ סביב השמש (חלק C).
 - **האליפסה ההתחלתית.** הטענה היא שמשוואות (6)–(7) נותנות את הגודל ואת הצורה של המסלול הראשון מתוך רדיוס השחרור, הסיבוב וקו הרוחב (B.1§). כאן $v_r = 0$ פירושו שלגוף אין ברגע השחרור מהירות ישירות הרחק מכדור הארץ או לעברו, ו- $0 < B < 2$ הוא הטווח של יחס המהירויות B שבו המסלול סגור. המבחן הוא אינטגרציה נומרית קצרה של אותם תנאי התחלה, שצריכה להחזיר את אותה פריגיאה (הנקודה הקרובה ביותר לכדור הארץ במסלול); מהירות שנוספה בזמן הניתוק, או השדה של כדור ארץ פחוס, היו מחייבים לחשב את האליפסה מחדש.
 - **התרחקות התחלתית.** הטענה היא שמן השחרור שאומץ הירח נע החוצה כבר מן המסלול הראשון: $\langle \ddot{a} \rangle > 0$, כאשר $\ddot{a}$ הוא קצב השינוי של גודל המסלול, והסוגריים מציינים את הממוצע שלו על פני מסלול אחד. המבחן ממצע את ההספק הגאותי משני הגופים — הגאות המורמת בכדור הארץ והגאות המורמת בירח. בשחרור שאומץ הממוצע הזה חיובי (B.2§).
 - **שרידות.** הטענה היא שהירח שורד את המעברים הראשונים שלו קרוב לכדור הארץ. השחרור שאומץ נמצא כ-7,200 ק"מ מעבר לגבול רוח הקשיח, 10,314 ק"מ (B.2§), והגוף קשיח ועגול ברגע השחרור (מאמר 2, *LEF Mechanism in Principle*, §B.7). הבדיקה שנותרה היא שצירוף הצפיפות, החוזק והטמפרטורה ששומר על הגוף שלם לאורך העיוות, ההתחממות ואובדן המסה הוא צירוף שהבנייה של מאמר 2 ומאמר 3 (*LEF Mechanism in Practice*) מייצרת.
 - **הנטייה של היום.** הטענה היא ש- 22.5° של השחרור הופכות ל- 5.145° של היום ביחס למישור המילקה. החוק המצומצם של D.1§ כבר נותן 5.145° במרחק של היום מן השחרור שאומץ; המבחן המלא הוא אינטגרציה וקטורית דרך מעברי Cassini-I Laplace עם פיזור תלוי-זמן (עבודה נוספת, פריט 1). האינטגרציה צריכה לשחזר יחד את הנטייה של היום ואת האקסצנטריות של היום.
 - **מרחק ושעון.** הטענה היא שהירח מגיע לכ-384,400 ק"מ בזמן שעמד לרשותו מאז השחרור, ומתרחק היום בכ-3.8 ס"מ לשנה. D.3§ מראה שפיזור קבוע יחיד אינו יכול לעשות את שניהם; המבחן הוא התאמה משותפת של מרחק, קצב זמן. ההתאמה צריכה להגיע למרחק של היום בתוך הגיל המותר, בהיסטורית פיזור שיכלה להיות לכדור הארץ.
 - **הקשר הגאוגרפי.** הטענה היא שאפשר לייחס את קו הרוחב של השחרור למקום על פני כדור הארץ. היא נבדקת על ידי שחזור קו הרוחב הקדום של מרכז המסה מן המבנה ומן הסיבוב בלבד, בלי להתאים אותו למסלול. הזהות $i_0 = |\lambda|$ של השורה הראשונה (משוואה (3) ב-A.2§) אינה תלויה בשחזור הזה, משום שאינה תלויה במקום שבו היה האתר.
- הקואורדינטה המודרנית 25° צפון, 165° מזרח, שהוצעה במאמר 3, אינה מדידה ישירה של קו הרוחב הקדום של השחרור; המאמר הזה מאמץ $\lambda = 22.5^\circ$, קו הרוחב של מרכז אזור המגע על הירח. יש להפריד בין שלושת המקומות המעורבים. בסיס האגס עמד סמוך ל-Kiritimati, 1.9° צפון, 157.5° מערב (מאמר 3), בערך על המשווה של אותו זמן. הקואורדינטה 25° צפון, 165° מזרח נקראת כגב האגס. קו הרוחב של השחרור, 22.5° , הוא קו הרוחב של מרכז אזור המגע, ברוחב של כ-3,000 ק"מ, שעליו ישב הירח בקצה האגס; בו משתמשים לאורך כל המאמר. 25° הוא מקרה רגישות: החוק המצומצם של D.1§ נותן ממנו 5.788° , לעומת 5.145° מ- 22.5° .
- רוחב טביעת הרגל של החיבור אינו טווח חופשי לבחירת קו הרוחב של מרכז המסה, והיעלמותה של הפרעה כבידתית מקומית אינה הוכחה לכך שכל המידע הדינמי על תנאי ההתחלה נמחק. במילים אחרות, גודל אזור

המגע אינו מתיר להזיז את קו הרוחב בתוכו עד שהמסלול יתאים; קו הרוחב נקבע לפי המקום שבו שכב מרכז המסה של הירח. שחזור של אתר מקור מסוים שונה מהגבלת משפחות של מסלולים התחלתיים: הראשון שואל מאיזה מקום על פני כדור הארץ עזב הירח; השני שואל אילו מצבי שחרור מובילים למסלול של היום, ואפשר לענות עליו בלי הראשון.

מפת התרומה והידע הקודם

הטבלה מפרידה בין מה שהמאמר לוקח מן המכניקה הסטנדרטית ומן הספרות לבין מה שהוא מוסיף. היא נקראת שורה אחר שורה: העמודה הימנית מציינת רכיב של הטיעון, והעמודה השמאלית אומרת אם הוא ידע קודם, יישום שלו, או התרומה של המודל.

רכיב	מעמד
$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, יסודות קפלריים ושימור תנע זוויתי	מכניקה סטנדרטית; הגזירה כאן מפורשת
שינוי נטייה על ידי גאות, תהודות ומפגשים	פיזיקה ומנגנונים שנחקרו בספרות [S2–S8]
מקור הנטייה בשחרור בקו רוחב שאינו אפס	יישום קינמטי; אין טענה לקדימות לגבי זהות מתמטית
קישור קו הרוחב לענפי השחרור ולתקציב של מאמר 2, ולגבולות הבנייה של מאמר 3	התרומה של המודל בעבודה זו
המעבר מן הבנייה אל הירח של היום	התוצאה של הסדרה; האינטגרציה המצומדת המלאה מנויה תחת "עבודה נוספת"

שלוש השורות הראשונות סטנדרטיות: התנע הזוויתי המסלולי ליחידת מסה h (המכפלה הווקטורית של המיקום והמהירות), היסודות הקפלריים המתארים מסלול, והדרכים הידועות שבהן גאות ומפגשים מסובכים מישור מסלול. מה שהמודל מוסיף הוא השורה הרביעית: הוא קושר את קו הרוחב של השחרור למצבי השחרור ולתקציב התנע הזוויתי שחושבו במאמר 2 ולגבולות הבנייה שנקבעו במאמר 3, כך שמסלול ההתחלה נקבע על ידי הבנייה ולא נבחר כדי להתאים. השורה האחרונה היא המטרה של הסדרה כולה.

מסקנות

המאמר מגיע לשש מסקנות. שלוש הראשונות נובעות ממצב השחרור והן קבועות; שלוש האחרונות מציינות מה מראים החישובים המצומצמים ומה האינטגרציה המלאה צריכה לעשות.

1. שחרור מקומי במהירות משיקית מזרחה נותן $i_0 = |\lambda|$ ביחס למשווה ברגע השחרור. זהו מקור גאומטרי לנטייה התחלתית במודל LEF. גוף העוזב מנקודה שמחוץ למשווה, כשהוא נע מזרחה עם כדור הארץ, נע במישור העובר דרך מרכז כדור הארץ ודרך הנקודה הזאת; המישור הזה נוטה למשווה בזווית השווה לקו הרוחב של הנקודה.
 2. אותה גאומטריה נותנת את רדיוס השחרור: מחוץ למשווה קו הקורטציה, שבו המסלול היה מעגל, נמצא ב- $r_c \cos^{-2/3} \lambda$ ביממה של 5.77 שעות וב- $\lambda = 22.5^\circ$ — $17,287$ ק"מ. הירח מתחיל להיפרד כשמרכז המסה שלו מגיע לקו הזה, ומשתחרר כ- 210 ק"מ מעבר לו, ב- $r_0 = 17,496$ ק"מ, כשמעט יותר ממחציתו חצתה את הקו; במרחק הזה נפגשים מבחני הנטייה והאקסצנטריות המצומצמים של מאמר 3 (C.5a§). רדיוס הקורטציה r_c (16,399 ק"מ) הוא המרחק שבו גוף שמסתובב עם כדור הארץ כבר נע במהירות של מסלול חופשי, כלומר המקום שבו גוף על המשווה, המסתובב עם כדור הארץ, כבר נע במהירות של מסלול מעגלי. מחוץ למשווה הגוף קרוב יותר לציר הסיבוב ולכן נע לאט יותר; הוא מגיע למהירות מעגלית מעט רחוק יותר, בגורם $\lambda \cos^{-2/3}$, השווה ל-1.0542 ב- 22.5° .
 3. כשהוא משתחרר שם, הירח נכנס למסלול כמעט מעגלי ($e_0 \simeq 0.037$, נקודת השחרור היא הפריג'יאה שלו), הגאות דוחפת אותו החוצה מהרגע הראשון, והוא נמצא כ- $7,200$ ק"מ מעבר לגבול רוש הקשיח. גבול רוש הקשיח, $10,314$ ק"מ, הוא המרחק שבתוכו הגאות של כדור הארץ הייתה קורעת גוף קשיח בצפיפות של הירח.
 4. הפתרון של חוק הדעיכה המצומצם הוא חוק $\tan i$. הוא חושף את הרגישות לתנאי השחרור, ואינו מבטל את התלות של המערכת המלאה בראולוגיה ובהתקררות. ממצב השחרור הוא נותן 5.145° במרחק של היום, הערך הנצפה (D.1§); ההתאמה היא תוצאה של משוואה מצומצמת אחת, והאינטגרציה המלאה עדיין נדרשת.
 5. חישוב גאוטי בפיזור קבוע המתקרב לקצב ההתרחקות של היום אינו משחזר בעצמו את הזמן שחלף מאז השחרור. נדרשת התאמה משותפת של מרחק, זמן, אקסצנטריות ונטייה. עם $Q_\oplus = 12$ הקצב של היום יוצא כ- 3.70 ס"מ לשנה, אך המרחק של היום מושג בתוך כ- 1.60 מיליארד שנה (D.3§); הפיזור בכדור הארץ חייב היה להשתנות עם הזמן.
 6. המאמר מגדיר את המעבר מבנייה למסלול כתוכנית כמותית; כל הקלטים שלה נקובים בשמם, והשחזור התרמי-מסלולי המלא הוא הפריט הראשון של "עבודה נוספת".
- מה שיש בידינו עכשיו הוא מסלול התחלה שנקבע על ידי הבנייה — $a_0 \simeq 18\,200$ ק"מ, $e_0 \simeq 0.037$, $i_0 = 22.5^\circ$ — ורשימה של החישובים המובילים ממנו אל הירח של היום.

נספח A — נוסחאות לשחזור המבחן הגאותי

נספח זה נותן את הנוסחה שמאחורי העמודה "תרומה גאותית יבשתית התחלתית" בטבלה של B.2§, וקוד קצר המשחזר את המספרים של חלקים B ו-D. השאלה שהנוסחה עונה עליה פשוטה: האם הגאות המורמת בכדור הארץ דוחפת את הירח החוצה או מושכת אותו פנימה?

במסגרת של השהיית זמן קבועה, התרומה של הגאות בגוף האם ל- a חיובית כאשר [S4]; היישום והחישוב כאן]:

$$\frac{\omega \cos i}{n} > \frac{f_1(e)}{(1-e^2)^{3/2} f_2(e)}, \quad n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}.$$

"השהיית זמן קבועה" פירושה שבליטת הגאות של כדור הארץ מגיבה למשיכת הירח בעיכוב קטן וקבוע; (14) במהלך העיכוב הזה כדור הארץ המסתובב נושא את הבליטה קדימה, לפני הירח או אחריו. הסמלים הם: ω קצב הסיבוב של כדור הארץ; i הנטייה של המסלול למשוואה, כך ש- $\omega \cos i$ הוא החלק של הסיבוב הפועל במישור המסלול; n התנועה הממוצעת, המהירות הזוויתית הממוצעת של הירח לאורך מסלולו, הנובעת לפי החוק השלישי של Kepler מן הציר הארוך למחצה a ומ- $K = G(M_\oplus + m)$; e -י האקסצנטריות. האגף השמאלי משווה אפוא בין המהירות שבה כדור הארץ מסתובב, במישור המסלול, לבין המהירות שבה הירח מקיף. במילים, התנאי אומר: הגאות של כדור הארץ דוחפת את הירח החוצה כאשר כדור הארץ מסתובב מהר יותר מן הקצב שבו הירח מקיף, ביתרון התלוי באקסצנטריות.

עבור מסלול מעגלי, $e = 0$, האגף הימני שווה ל-1 והתנאי מצטמצם ל- $\omega \cos i > n$: הבליטה מקדימה את הירח ומושכת אותו קדימה, כמו בלוויין שמעבר לקו הקורטציה. במסלול אקסצנטרי הירח נע מהר מן הממוצע שלו סמוך לפריגיאיה, שם הוא גם הקרוב ביותר והגאות החזקה ביותר; האגף הימני עולה אז על 1, וכדור הארץ צריך להסתובב מהר יותר בהתאם כדי שהאפקט נטו יהיה כלפי חוץ. שתי פונקציות האקסצנטריות מודדות זאת:

$$f_1(e) = 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8, \quad f_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6.$$

שתיהן שוות ל-1 עבור מעגל וגדלות עם e . כשמיישמים את המבחן על השורות של B.2§, הוא נותן (15) $1.1962 > 0.7526$ לשחרור על הקו המשווני (המסלול מתכווץ), שוויון על קו הקורטציה, $x = 1.0542$ (הגאות ניטרלית), $1.0128 > 1.0769$ בשחרור שאומץ, $x = 1.0669$, כ-210 ק"מ מעבר לקו (המסלול מתרחב מהרגע הראשון; גרסה קודמת, עם שחרור כ-100 ק"מ מעבר לקו ב- $x = 1.0603$, נתנה $1.0029 > 1.0357$), ו- $1.0532 > 1.1660$ ב- $x = 1.08$ (המסלול מתרחב). על קו הקורטציה השוויון מדויק מעצם הבנייה: הרדיוס המעגלי של משוואה (7a) הוא הרדיוס שבו $\omega \cos \lambda = n$.

הפולינומים אינם אוניברסליים לכל חוק פיזור. כדי להפריד בין אימות מתמטי לבין הנחה חומרית, נבדק סימן ההספק גם על ידי אינטגרציה של הכוח המשיקי והרדיאלי לאורך מסלול אחד, באותו מודל. החישוב אינו כולל גאות בירח, מומנט של השמש או חיבור פעיל. סימן האפקט מאושר אפוא באופן בלתי תלוי בפיתוח לטור; מה שנשאר הנחה הוא מודל השהיית הזמן הקבועה עצמו.

להלן קוד קצר לשחזור האליפסות, הסימן הגאותי וההמחשה של הנטייה, מתוך תנאי ההתחלה המצומדים של מאמר 2. הוא אינו מוצג כאינטגרטור ל-4.5 מיליארד שנה.

```
from math import pi, sin, cos, tan, atan, sqrt, radians, degrees
G, M, m = 6.674e-11, 5.972e24, 7.35e22
K = G * (M + m)
```

```

lat = radians(22.5)
# r0 [km], Earth day at release [h]: coupled outputs of Paper 2
cases = [(16398.5, 5.77), # on the equatorial line: release at apogee
(17287.3, 5.77), # corotation line: circular, tide neutral
(17496.3, 5.77), # adopted: about 210 km beyond the line
(17710.4, 5.77)] # 8% beyond the line
for r_km, day_h in cases:
    r = 1000 * r_km
    omega = 2*pi/(3600*day_h)
    B = omega**2*r**3*cos(lat)**2/K
    a, e = r/(2-B), abs(1-B)
    n = sqrt(K/a**3)
    f1 = 1 + 15.5*e**2 + 31.875*e**4 + 11.5625*e**6 + .390625*e**8
    f2 = 1 + 7.5*e**2 + 5.625*e**4 + .3125*e**6
    lhs = omega*cos(lat)/n
    rhs = f1/((1-e**2)**1.5*f2)
    toy_i = degrees(atan(tan(lat)*sqrt(a/384400e3)))
    print(a/1000, e, a*(1-e)/1000, lhs, rhs, toy_i)

```

הקוד הולך אחרי המאמר צעד אחר צעד. הוא לוקח ארבעה רדיוסי שחרור ביממה של 5.77 שעות בזמן השחרור ובקו רוחב 22.5° : על קו הקורוטציה המשווני (16,398.5 ק"מ), על קו הקורוטציה של 22.5° (17,287.3 ק"מ; גרסה קודמת נתנה 17,286.9 ק"מ, שמשאיר $e \approx 8 \times 10^{-5}$ שיורי), בשחרור שאומץ כ-210 ק"מ מעבר לו (17,496.3 ק"מ; גרסה קודמת השתמשה ב-17,387.3 ק"מ, כ-100 ק"מ מעבר לו), ו-8% מעבר לקו המשווני (17,710.4 ק"מ). לכל אחד מהם הוא מחשב את יחס המהירויות B של משוואה (6) — היחס בריבוע בין המהירות שהסיבוב נושא לבין מהירות של מסלול מעגלי באותו מרחק; אחר כך את הציר הארוך למחצה a ואת האקסצנטריות e של משוואה (7); את התנועה הממוצעת n ; את פונקציות האקסצנטריות של משוואה (15), הכתובות כשברים עשרוניים (15.5 הוא $31/2$, 31.875 הוא $255/8$, 11.5625 הוא $185/16$, 0.390625 הוא $25/64$, 7.5 הוא $15/2$, 5.625 הוא $45/8$, 0.3125 הוא $5/16$); ואת שני האגפים של משוואה (14). השורה האחרונה מיישמת את החוק המצומצם של משוואה (11) עם $\epsilon = 0$, מ- a ועד המרחק של היום, 384,400 ק"מ. כל שורה מודפסת נותנת את a בק"מ, את e , את הפריגיאה בק"מ, את שני האגפים של המבחן הגאוטי ואת הזווית הסופית. הפלט משחזר את השורות של §2.B (14,304 ק"מ, 0.1464, 12,209 ק"מ; 17,287 ק"מ, 0, 17,287 ק"מ; 18,163 ק"מ, 0.0367, 17,496 ק"מ; 19,151 ק"מ, 0.0752, 17,710 ק"מ), את המבחן הגאוטי $1.0128 > 1.0769$ בשחרור שאומץ, ואת הזוויות 5.145° ו- 5.282° של §D.1.

נספח B — היקף האימות והזמינות

נספח זה מציין מה נבדק, כיצד, ומה הבדיקות אינן מכסות, כדי שהקורא יוכל לשפוט עד כמה אומת כל מספר במאמר.

הקובץ המקורי נקרא במלואו. גם האלגברה של משוואת הדעיכה נבדקה מול העמוד המקורי. ענפי המבנה והסיבוב שבטבלה נלקחו מן החישובים של מאמר 2, וההמרה שלהם ליסודות מסלוליים נבדקה מחדש. בבדיקה של מאמר 2, אינטגרציה ניוטונית בלתי תלויה של מסלול הייחוס שחזרה את הפריגיאה ואת החזרה לנקודת ההתחלה; השגיאה היחסית בחזרה, במיקום, הייתה כ- 1.6×10^{-10} . כלומר, אחרי מסלול שלם אחד הגוף שבאינטגרציה חזר לנקודת ההתחלה שלו בדיוק של פחות מחלק אחד למיליארד ממרחקו, וזה מאשר שהמסלול שחושב ממשוואות (6)–(7) הוא המסלול שהכבידה הניוטונית מייצרת. האימות הזה בוחן את הקינמטיקה המונופולית, לא את מציאות החיבור ולא את תקפות הראולוגיה. “מונופולית” פירושה שכל גוף מטופל כמסה נקודתית; הבדיקה מאשרת את החשבון המסלולי, וההנחות הפיזיקליות נשארות אלה שנקובות בחלק E.

שמות המקורות והקישורים אליהם נבדקו, והטענות המיוחסות להם הוגבלו לתוכן הנגיש בעמודי המקור ובתקצירים שלהם; אין טענה לסקירה של כל מאמר מצוטט משוואה אחר משוואה. המסמך כולל את הקוד לחישובי ההמשך. הפתרונות המבניים המלאים שייכים לחומר המשלים של מאמר 2; אינטגרציה תרמית-מסלולית מצומדת מלאה אינה כלולה, ואינה מדווחת כאילו בוצעה.

עבודה נוספת — פתחים למחקר

החישובים של המאמר הזה קובעים את נקודת ההתחלה; הפריטים שלהלן הם החישובים שיישאו אותה הלאה. כל אחד מציין קלט שהמאמר הזה מספק, ואת התוצאה שהחישוב יחזיר.

1. **אינטגרציה תרמית-מסלולית מצומדת ממצב השחרור.** תנאי ההתחלה של מצב השחרור של חלק B — שחרור ב- $r_0 = 17,496$ ק"מ כפריגיאה, $a_0 \simeq 18,200$ ק"מ, $e_0 \simeq 0.037$, $i_0 = 22.5^\circ$, היממה של 5.77 שעות ו- J_2 המותאם לה כ- $J_{2, \text{now}} (\omega/\omega_{\text{now}})^2$ — קבועים; מה שנדרש הוא אינטגרציה דרך המעבר של מישור Laplace, מצב Cassini ופיזור תלוי-זמן בשני הגופים, מן הסוג שאינטגרטורים סקולריים קיימים מבצעים. התוצאה שלה היא התחזית של הנטייה של היום. כאן J_2 מודד את הבליטה המשוונית של כדור הארץ; בגוף נוזלי הבליטה גדלה עם ריבוע קצב הסיבוב, ומכאן ההתאמה. המעבר של מישור Laplace הוא המרחק שבו המישור שסביבו המסלול מתנווד (נוקף) מתחלף מן המשווה של כדור הארץ, השולט קרוב פנימה, למישור המילקה, השולט רחוק בחוץ (C.1§). מצב Cassini הוא הסידור היציב שבו ציר הסיבוב של הירח, הנורמל למסלולו והנורמל למישור המילקה מסתובבים יחד (C.3§). אינטגרטור סקולרי עוקב אחר ההתפתחות האיטית, הממוצעת על פני המסלול, של המסלול לאורך מיליארדי שנים.
2. **היסטוריית הפיזור של כדור הארץ.** שום Q קבוע אינו מתאים גם לקצב של היום וגם לגיל (D.3§). מודלים של תהודת אוקיינוסים בכדור הארץ הקדום, המורצים מן היממה של 5.77 שעות בזמן השחרור (ולא מן היממה של 6.4 שעות של המצב המוקדם יותר, של האגס לבדו), יספקו את פונקציית הקצב שהאינטגרציה דורשת. Q מודד כמה מעט מאנרגיית הגאות כדור הארץ מפזר בכל מחזור: Q נמוך פירושו פיזור חזק והתרחקות מהירה. תהודת אוקיינוס מתרחשת כאשר זמן המחזור הטבעי של הנדנוד של אגן אוקיינוס מתקרב לזמן המחזור הגאותי; הפיזור עולה אז בחדות, והוא משתנה ככל שהיממה מתארכת והיבשות נעות [S8].
3. **הצירים של כדור הארץ-ירח.** הזווית של כ- 3.8° בין סיבוב כדור הארץ לבין התנע הזוויתי הכולל בזמן השחרור (A.3§) שייכת למערכת הצירים של כדור הארץ-ירח, עבודה עתידית מחוץ לסדרה, ואין כאן טענה לגביה.
4. **מתג אוקיינוס המאגמה.** שרידות הנטייה תלויה בשאלה אם אוקיינוס המאגמה של הירח התמצק לפני 20 רדיוסי כדור ארץ; האילוצים על כך מן המודלים של [S6] ו-[S7] נדונים ב-D.2§. מודל תרמי של ירח בעל מכסה חד-צדדי — עבה בצד הרחוק, דק בצד הקרוב, שהימות בו היו עדיין חמות בזמן הניתוק (מאמר 3) — ייתן את זמן ההתמצקות עבור הגוף הזה ולא עבור גוף סימטרי. אוקיינוס המאגמה הוא השכבה החיצונית המותכת של הירח הצעיר; כל עוד היא נוזלית, הירח מפזר אנרגיה גאותית בעוצמה, והנטייה מרוסנת מהר יותר. מכסה בעובי לא אחיד מתקרר בקצב שונה מן הקליפה האחידה שהמודלים שפורסמו מניחים, ולכן יש לחשב עבור הגוף הזה את הזמן שבו המתג פועל.
5. **הצורה המאובנת.** גוף שעבר התעגלות החוצה, פחיסות והתעגלות פנימה בזמן שישיב, ככדור פחוס, על קצה האגס, נושא את צורתו מאותו שלב, ולא מנעילה גאותית מאוחרת יותר. הקשר בין הגאומטריה של הכדור הפחוס על קצה האגס (מאמר 3) לבין הצורה הנוכחית מדרגה 2 הוא חישוב שעוד לא נעשה. הצורה המאובנת היא הסטייה הקלה של צורת הירח מכדור, שהקליפה החיצונית הקשיחה שלו שימרה מזמן מוקדם יותר; הצורה מדרגה 2 היא החלק בקנה המידה הגדול ביותר של הסטייה הזאת — ההתארכות והפחיסות הכוללות שלה — כפי שהוא נמדד בשדה הכבידה. במודל LEF הפחיסות וההתעגלות של גוף הירח התרחשו בזמן שהיה עדיין מחובר (מאמר 7, *The Poles*); החישוב יבדוק אם הצורה שהשלב הזה השאיר תואמת את הצורה של היום.

זמינות הקוד

כל התוצאות המספריות של המאמר הזה משוחזרות על ידי הסקריפטים של חבילת השחזור של Python 3 (LEF (numpy, scipy, המדפיסה את הערכים של כל סעיף מתוך הקלטים שצוינו בטקסט. החבילה מלווה את הסדרה כחומר משלים, והיא מופקדת ב-doi:10.5281/zenodo.22743615 (Zenodo); ה-DOI מוביל תמיד לגרסה העדכנית).

- Duran, Z. (2026). *The Model*. LEF, Paper 1 [1]
- Duran, Z. (2026). *LEF Mechanism in Principle — Corotation and Angular Momentum*. LEF, Paper [2]
.2. Integrated working manuscript, including the release-latitude and orbital-survival calculations
- Duran, Z. (2026). *LEF Mechanism in Practice — Pressure and the Pear*. LEF, Paper 3. Integrated [3]
.working manuscript; the connection and the release margin beyond corotation
- Williams, D. R. (2024). *Moon Fact Sheet*. NASA Goddard Space Flight Center, NSSDCA. [S1]
. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html>
- Pahlevan, K., & Morbidelli, A. (2015). *Collisionless encounters and the origin of the lunar [S2]
.inclination*. *Nature*, 527, 492–494. Authors' copy: arXiv:1603.06515
- Ćuk, M., Lock, S. J., Stewart, S. T., & Hamilton, D. P. (2021). *Tidal Evolution of the Earth-Moon [S3]
.System with a High Initial Obliquity*. Authors' copy: arXiv:2107.03353
- Correia, A. C. M., Laskar, J., Farago, F., & Boué, G. (2011). *Tidal evolution of hierarchical and [S4]
.inclined systems*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. DOI: 10.1007/s10569-011-9368-9.
.Authors' copy: arXiv:1107.0736
- Tremaine, S., Touma, J., & Namouni, F. (2009). *Satellite dynamics on the Laplace surface*. *The [S5]
.Astronomical Journal*, 137, 3706–3717. Authors' copy: arXiv:0809.0237
- Downey, B. G., Nimmo, F., & Matsuyama, I. (2023). *The thermal-orbital evolution of the Earth- [S6]
.Moon system with a subsurface magma ocean and fossil figure*. *Icarus*, 389, 115257. Authors' copy:
.arXiv:2209.00935
- Chen, E. M. A., & Nimmo, F. (2016). *Tidal dissipation in the lunar magma ocean and its effect on [S7]
.the early evolution of the Earth–Moon system*. *Icarus*, 275, 132–142
- Farhat, M., Auclair-Desrotour, P., Boué, G., & Laskar, J. (2022). *The resonant tidal evolution of [S8]
.the Earth-Moon distance*. *Astronomy & Astrophysics*, 665, L1